Black-Scholes, marktkonsistente Bewertung und Risikomaße

Thomas Knispel[a] Gerhard Stahl[b] Stefan Weber[c]

13. Januar 2011

Zusammenfassung

Versicherungskonzerne sind heute einer Vielzahl von Risiken ausgesetzt. Neben versicherungstechnischen können auch Finanzmarktrisiken nicht vernachlässigt werden. Die Bewertung und Absicherung z. B. des Gesamtportfolios eines Versicherungsunternehmens kann daher nicht wie in der klassischen Versicherungsmathematik allein auf Grundlage des Ausgleichs im Kollektiv vorgenommen werden. Stattdessen muss eine marktkonsistente Bewertung und Absicherung mit Methoden der Finanzmathematik erfolgen. Der vorliegende Artikel führt in die Grundprinzipien der Finanzmathematik ein, die in ihrer modernen Form von Fischer Black, Robert Merton und Myron Scholes in den frühen 70er Jahren initiiert worden ist. Ihre Bedeutung für Versicherungskonzerne wird am Beispiel interner Modelle und des *Market Consistent Embedded Value* (MCEV) erläutert.

1 Hintergrund

Moderne Finanzmathematik, oder auch *Financial Engineering*, stellt heutzutage ein unverzichtbares Hilfsmittel für Banken und Versicherungen dar. Die Bewertung von Risiken und Chancen, die Konstruktion von optimalen Investitionsstrategien und das Design von Produkten erfordern eine umfassende quantitative Analyse. Dabei muss vor allem die Rolle der Unsicherheit über zukünftige Entwicklungen berücksichtigt werden. Die Grundlage der Versicherungs- und Finanzmathematik ist die Mathematik des Zufalls, die Stochastik. Deren Techniken müssen mit ökonomischen Konzepten verknüpft werden, die eine Übersetzung von Strukturen und Mustern auf Versicherungs- und Finanzmärkten in Mathematik ermöglichen.

Eine wichtige Brücke zwischen ökonomischen Fragestellungen und mathematischen Techniken wurde Anfang der 70er Jahre am MIT von Fischer Black (*1938 - †1995), Myron S. Scholes (*1941) und Robert C. Merton (*1944) errichtet. Ihre Grundideen zur Bewertung von Finanzoptionen und -derivaten sind fundamental und können nicht nur im klassischen *Black-Scholes-Modell*, sondern auch in komplexen modernen Finanzmarktmodellen angewendet werden. Merton und Scholes wurden hierfür 1997 mit dem Wirtschaftsnobelpreis ausgezeichnet. Ausgehend von den Konzepten von Black, Scholes und Merton entwickelten sich neue quantitative Techniken und Produkte auf den Finanzmärkten. Gleichzeitig wurde die moderne Finanzmathematik begründet, deren Methoden vielen Bereichen der Mathematik – z. B. der Stochastischen Analysis, der Theorie der Differentialgleichungen, der Funktionalanalysis oder der Numerik – entstammen.

Eine englischsprachige Version dieses Artikels erscheint unter dem Titel *From the equivalence principle to market consistent valuation* im *Jahresbericht der DMV*, 2011.

[a]Leibniz Universität Hannover, Institut für Mathematische Stochastik, Welfengarten 1, 30167 Hannover, E-Mail: knispel@stochastik.uni-hannover.de

[b]Talanx AG, Quantitative Risk Management, Riethorst 2, 30659 Hannover, E-Mail: gerhard.stahl@talanx.com

[c]Leibniz Universität Hannover, Institut für Mathematische Stochastik, Welfengarten 1, 30167 Hannover, E-Mail: sweber@stochastik.uni-hannover.de

Im Gegensatz zur Finanzmathematik galt Versicherungsmathematik unter Mathematikern oft als weniger interessant. Auch in der Praxis spiegelte sich diese Dichotomie wider. Während im Bankensektor *High-Tech-Quants* schon seit Mitte der 80er Jahre vor allem im Investment Banking eine zentrale Rolle spielten, wurden in Versicherungsunternehmen weiterhin traditionelle Techniken angewendet. Diese Situation hat sich im letzten Jahrzehnt geändert.

Versicherungen sind nicht nur klassischen versicherungstechnischen Risiken ausgesetzt, die sich gut beherrschen lassen, sondern müssen auch systematische Risiken bewerten und absichern. Gleichzeitig sind Versicherungen mit Finanzmarktrisiken konfrontiert, deren Analyse der klassischen Versicherungsmathematik unzugänglich ist. Moderne Versicherungsmathematik muss die Finanzmathematik integrieren. Ein Beispiel bildet das im Kontext von *Solvency II* diskutierte Konzept des *Market Consistent Embedded Value*, das sich nur im Rahmen einer Theorie a la „Black-Scholes“ verstehen lässt.

High-Tech-Quants in der Versicherungsbranche sind daher ein neueres Phänomen. Techniken der Finanzmathematik erlauben eine Analyse von systematischen Risiken, insbesondere von Finanzmarktrisiken. Einerseits ermöglichen sie einen Zugang zur marktkonsistenten Bewertung von Gesamtportfolios von Versicherungsunternehmen. Andererseits macht die Optionspreistheorie komplexere Versicherungsprodukte einer sinnvollen Analyse zugänglich und somit in der Realität erst möglich.

Wie bei derivativen Finanzprodukten kann der Handel mit solchen Strukturen zur Absicherung von bestehenden Risiken oder zu spekulativen Zwecken instrumentalisiert werden. Beispiele sind Katastrophenanleihen („Cat-Bonds“) und Variable Annuities. Aus einer übergeordneten Perspektive gibt es klare Argumente für den Nutzen innovativer Produkte: Ihr Handel ermöglicht eine bessere Verteilung von Risiken auf viele Finanzmarktteilnehmer. Dies kann für Versicherungsunternehmen vorteilhaft sein. Gleichzeitig kann jeder Finanzmarktakteur sein eigenes Portfolio besser diversifizieren und optimieren. – Im Angesicht der jüngsten Finanzkrise stellt sich jedoch die Frage, ob diese positiven Effekte wirklich bestehen. Haben komplexe Produkte nicht neue Risiken von immensen Ausmaßen generiert? Sind sie nicht zum großen Teil auch für die Krise selbst verantwortlich?

Diese Fragen sind vielfach diskutiert worden. Eine Antwort ist jedoch nicht so simpel. Stichworte, die in diesem Kontext diskutiert wurden, sind z. B. falsche politische Vorgaben, mangelhafte Kontrollen, Investitionen auf Basis von Schulden, unangemessene Bonussysteme ohne Haftung, Schneeballsysteme a la Madoff, Dummheit, Betrug, etc. In der Kritik standen aber auch die mathematischen Methoden und Modelle, mit denen Quants Produkte, Risiken und Strategien analysieren. Ist vielleicht die Mathematik der Finanzmärkte mitverantwortlich für die Krise? Und lautet die „Black-Scholes-Formel“ der Gegenwart womöglich: Markets + Math = Mayhem?[1]

Die Rolle der Mathematik in der Finanzkrise soll in diesem Artikel nicht beleuchtet werden. Kürzlich diskutiert wurde sie jedoch z. B. von Hans Föllmer [14]. Sein Fazit ist, dass nicht weniger, sondern nur mehr Mathematik helfen kann, die komplexe Realität zu verstehen: Markets - Math = Mayhem!

Wie aber funktioniert die Mathematik der Finanzmärkte? Wie übersetzt man ökonomische Fragestellungen aus der Realität in Mathematik? Was sind die Grundprinzipien des *Financial Engineering*? Und welche Querverbindungen ergeben sich zur Versicherungsmathematik? – Diese Fragen stehen im Fokus des vorliegenden Artikels.

2 Grundprinzipien des Financial Engineering

2.1 Klassische Versicherungsmathematik vs. Finanzmathematik

Die klassische Versicherungsmathematik beruht auf dem wichtigsten Grundprinzip von Versicherungen – der Absicherung von Risiken durch den Ausgleich im Kollektiv. Anstelle eines Individuums

[1]Financial Times, 21. März 2009

trägt eine Gemeinschaft die Risiken aller ihrer Mitglieder, der Versicherungsnehmer; jeder Einzelne ist gegen eine in Relation zum möglichen Schaden geringe Prämie abgesichert.

Wenn Schäden z. B. unabhängig auftreten und keine systematischen Risiken bestehen, ist eine Bewertung mit klassischen Methoden sehr einfach. Zufällige Zahlungsströme wie z. B. Leistungen einer Rentenversicherung oder einer Risikolebensversicherung werden dann mithilfe des erwarteten Barwerts BW bewertet. Dieser ergibt sich im Zeitpunkt 0 für zufällige Auszahlungen der Höhen $C_0, C_1, \ldots, C_n$ mit Fälligkeiten $0, 1, \ldots, n$ und einen deterministischen Einperiodenzins $r \geq 0$ als Erwartungswert der Summe der diskontierten Zahlungen $(1+r)^{-t} C_t$, $t = 0, 1, \ldots, n$. Formal ausgedrückt:

$$BW_0(C_0, C_1, \ldots, C_n) = E\left[\sum_{t=0}^{n} \tfrac{1}{(1+r)^t} C_t\right].$$

Dieser Bewertungsansatz ist die Basis für die Prämienkalkulation für klassische Versicherungsprodukte. Das sogenannte Äquivalenzprinzip postuliert:

Erwarteter Barwert der Prämien = erwarteter Barwert der Leistungen

Zentral ist bei diesem Bewertungsprinzip, dass alle Erwartungswerte unter dem *statistischen Wahrscheinlichkeitsmaß* berechnet werden, das die tatsächliche Häufigkeit des Eintretens von Ereignissen beschreiben soll. Im Bereich der Lebensversicherungsmathematik bedeutet dies z. B., dass Sterbe- und Überlebenswahrscheinlichkeiten gerade den relativen Anzahlen der Toten bzw. Überlebenden jeder Altersstufe entsprechen, die statistisch ermittelt werden. Beim perfekten *Ausgleich im Kollektiv* können statistische Mittelwerte zur Bewertung herangezogen werden. Dieses Verfahren wird mathematisch durch das *Gesetz der großen Zahl* gerechtfertigt.

Das folgende Beispiel skizziert die Berechnung der Nettoeinmalprämie für eine Risikolebensversicherung.

Beispiel 2.1 *Ein x-jähriger Mann möchte eine Risikolebensversicherung mit Laufzeit von 10 Jahren abschließen, die im Todesfall die Versicherungsleistung von 100.000 € am Ende des Todesjahres auszahlt. Bezeichnet man mit T_x die zufällige Restlebenszeit des x-Jährigen, so ergibt sich als Zahlungsstrom der Versicherungsleistungen formal*

$$C_0 = 0 \quad \textit{und} \quad C_t = \begin{cases} 100.000 & \textit{falls } t-1 < T_x \leq t \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}, \quad t = 1, \ldots, 10.$$

Für den Barwert der Leistungen gilt somit

$$BW_0(C_0, C_1, \ldots, C_{10}) = 100.000 \cdot \sum_{t=1}^{10} \tfrac{1}{(1+r)^t} P[t-1 < T_x \leq t].$$

Die Wahrscheinlichkeit $P[t-1 < T_x \leq t]$, dass der bei Vertragsabschluss x-jährige Mann zwischen $t-1$ und t verstirbt, kann mithilfe der einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten q_z und Überlebenswahrscheinlichkeiten p_z eines z-Jährigen in der Form

$$P[t-1 < T_x \leq t] = q_{x+t-1} \prod_{j=0}^{t-2} p_{x+j}$$

dargestellt werden. Diese Werte sind in Sterbetafeln aufgelistet, und man ermittelt durch Einsetzen dieser Werte und des Rechnungszinses r den Barwert der Leistungen. Dieser entspricht gemäß des Äquivalenzprinzips der Nettoeinmalprämie, die der Versicherte bei Abschluss des Vertrages entrichten muss.

Der Ausgleich im Kollektiv ist bei der Bewertung von Produkten gemäß des Gesetzes der großen Zahl anwendbar, wenn Schadenereignisse weitgehend unabhängig auftreten. Sind jedoch systematische Risiken mit im Spiel, dann wird die Analyse deutlich komplexer, und das Äquivalenzprinzip ist nicht mehr ohne adäquate Modifikationen gültig. Dieses wird insbesondere relevant bei modernen Versicherungsprodukten wie Variable Annuities, die eine Kombination von versicherungstechnischen Risiken und Finanzmarktrisiken beinhalten. Auch die Bewertung von Gesamtportfolios von Versicherungen erfordert eine Analyse auf Basis der Methoden moderner Finanzmathematik, denn diese sind stets Finanzmarktrisiken und oft auch *systematischen* versicherungstechnischen Risiken ausgesetzt.

Bei systematischen Risiken tritt nun das *Prinzip der risikoneutralen Bewertung* an die Stelle des versicherungsmathematischen Äquivalenzprinzips. Bei der risikoneutralen Bewertung handelt es sich nicht um ein willkürliches Verfahren, sondern um ein Bewertungsprinzip, das aus einfachen axiomatischen Annahmen in Modellen exakt abgeleitet wird. Die zentrale Hypothese ist dabei, dass Märkte keinen risikolosen Gewinn zulassen („no free lunch"). Dies bedeutet, dass man keine kostenlose Handelsstrategie konstruieren kann, die ohne jegliches Verlustrisiko echte Gewinne verspricht. Diese Annahme wird auf der Metaebene gerechtfertigt, indem auf die Wirkung von Angebot und Nachfrage, also auf die Gleichgewichtstheorie von Preisen, verwiesen wird. Nach einem „*free lunch*" gäbe es auf Märkten mit gewinnorientierten Akteuren immer eine erhebliche Nachfrage. Diese würde Preise so verändern, dass die entsprechende Handelsstrategie nicht mehr kostenlos wäre. Die Möglichkeit eines „*free lunch*" würde somit entfallen.

Bei der *risikoneutralen Bewertung* erfolgt die Bewertung von Finanz- und Versicherungsverträgen formal genau wie im Äquivalenzprinzip. Preise ergeben sich wieder als Erwartungswert der Auszahlungen, d. h. *als ob* Akteure risikoneutral wären. Aufgrund dieses formalen Zusammenhangs spricht man vom Prinzip der *risikoneutralen* Bewertung. In der korrekten Bewertungsformel muss das statistische Maß jedoch im Gegensatz zum klassischen Äquivalenzprinzip durch ein technisches Wahrscheinlichkeitsmaß ersetzt werden, das *risikoneutrales Maß* (oder auch *Martingalmaß* oder *Pricing-Maß*) genannt wird.

Die Wahl des Bewertungsmaßes ist der zentrale Unterschied zwischen klassischer aktuarieller Bewertung und moderner Finanzmathematik. Obwohl als „risikoneutral" bezeichnet aufgrund der formalen Struktur, ist dieser Ansatz vollständig konsistent mit risikoaversen Marktakteuren. Risikoaversion spiegelt sich marktkonsistent im Martingalmaß wider. Im aktuariellen Kontext erfordert die marktkonsistente Bewertung von modernen Versicherungsprodukten und Gesamtportfolios eine Integration von finanzmathematischen Bewertungsprinzipien und versicherungsmathematischen Fragestellungen.

2.2 Ein einfaches Einperiodenmodell mit zwei Szenarien

Wie funktioniert moderne Finanzmathematik? Wie lassen sich aus einfachen Axiomen Bewertungsprinzipien herleiten und anwenden? Diesen Fragen soll zunächst im Rahmen einfacher Einperiodenmodelle nachgegangen werden, die eine transparente und mathematisch einfache Darstellung von Grundbegriffen, Kerngedanken und -resultaten erlauben, wie sie auch in komplexeren Multiperiodenmodellen Gültigkeit besitzen.

Einperiodenmodelle sind Finanzmarktmodelle, die nur eine Handelsperiode bzw. zwei Zeitpunkte $t = 0, 1$ umfassen. Der Zeitpunkt 0 wird als gegenwärtiger Zeitpunkt interpretiert, zu dem aktuelle Marktpreise beobachtbar sind. Die zukünftige Entwicklung von Preisen ist noch nicht bekannt, sondern dem Zufall unterworfen.

In der Modellwelt wird zunächst angenommen, dass genau zwei verschiedene Szenarien auftreten können: ω_1 und ω_2. Die Menge aller möglichen Szenarien ist damit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. Beiden Szenarien werden statistische Wahrscheinlichkeiten $P[\{\omega_1\}] > 0$ und $P[\{\omega_2\}] > 0$ zugeordnet, die strikt positiv sind (sonst wäre eines der Szenarien irrelevant). Den Wahrscheinlichkeitsraum mit zwei Zuständen kann man auch als Ergebnis des Wurfs einer (nicht unbedingt fairen) Münze interpretieren: fällt z. B. „Kopf“ tritt Szenario ω_1 ein, bei „Zahl“ wird Szenario ω_2 realisiert.

Im Finanzmarktmodell muss noch die Dynamik der Preise der primären, liquide handelbaren Finanzprodukte spezifiziert werden. Im einfachsten Fall werden genau zwei primäre Produkte modelliert, ein Sparbuch und eine Aktie, deren Anfangspreise im Markt beobachtbar sind. Der Wert der Produkte zum Zeitpunkt 1 ist szenarioabhängig und zum Zeitpunkt 0 nicht bekannt. Zur mathematischen Formalisierung wird dem Sparbuch die Wertpapierkennnummer „0“ zugeordnet, der Aktie die Nummer „1“. Mit dieser Konvention entsprechen S_t^0, S_t^1 den Werten von Sparbuch und Aktie zu den Zeitpunkten $t = 0, 1$.

Ein konkretes Einperiodenmodell mit zwei Szenarien kann z. B. folgendermaßen spezifiziert werden:

$$\begin{tikzcd} & \boxed{S_1^0(\omega_1) = 2} \\ \boxed{S_0^0 = 1} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \boxed{S_1^0(\omega_2) = 2} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \boxed{S_1^1(\omega_1) = 16} \\ \boxed{S_0^1 = 5} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \boxed{S_1^1(\omega_2) = \ \ 8} \end{tikzcd}$$

Die Wertentwicklung des Sparbuchs ist im Beispiel unabhängig vom Zustand der Welt. Stochastische Zinsen könnten jedoch mühelos in die Analyse integriert werden.

Ein Investor kann in diesem Finanzmarktmodell zum Zeitpunkt 0 Geld investieren oder einnehmen, indem er Produkte kauft oder verkauft. Positive Stückzahlen nennt man *long positions*, negative dagegen *short positions*. Eine short position im Sparbuch ist gleichbedeutend mit Schulden.

Definition 2.2 (Handelsstrategie) *Eine Handelsstrategie im Einperiodenmodell ist eindeutig festgelegt durch die Stückzahlen $\vartheta = (\vartheta^0, \vartheta^1)$ des Sparbuchs und der Aktie, die in der Periode von 0 bis 1 gehalten werden. Das Anfangsinvestment V_0^ϑ berechnet sich durch*

$$V_0^\vartheta := \vartheta^0 S_0^0 + \vartheta^1 S_0^1, \tag{1}$$

und das resultierende Endvermögen V_1^ϑ ist gegeben durch

$$V_1^\vartheta := \vartheta^0 S_1^0 + \vartheta^1 S_1^1. \tag{2}$$

Für die theoretische Analyse werden zunächst eine Reihe vereinfachender Annahmen gemacht. So wird u. a. angenommen, dass Produkte in beliebiger – auch nicht-ganzzahliger und negativer – Stückzahl handelbar sind, dass unbegrenzt Kapital zum selben Zins angelegt wie geliehen werden kann und dass keine Steuern und Transaktionskosten anfallen. In der Praxis sind diese Aspekte jedoch relevant und werden in komplexeren Modellen adäquat berücksichtigt.

Die zentrale Grundannahme ist die **Abwesenheit von Arbitrage**:

Definition 2.3 (Arbitrage) *Eine Arbitragestrategie ist eine Handelsstrategie ϑ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Die Implementierung der Strategie ist kostenneutral, d. h. $V_0^\vartheta = 0$.*
2. *Im Zeitpunkt 1 treten keine Verluste auf, d. h. es gilt $V_1^\vartheta(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$.*
3. *Mit positiver Wahrscheinlichkeit führt die Strategie zu einem Gewinn, d. h. $P[V_1^\vartheta > 0] > 0$.*

Ein Finanzmarktmodell, das keine Arbitragestrategie zulässt, heißt arbitragefrei.

Finanzmarktmodelle sind nicht *a priori* arbitragefrei, sondern müssen in Hinblick auf Arbitrage untersucht werden. Die folgende Spezifikation eines Einperiodenmodells lässt Arbitrage zu.

Beispiel 2.4 *Angenommen, die Preisentwicklung der primären Produkte ist gegeben durch:*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \boxed{S_1^0(\omega_1)=2} \\ \boxed{S_0^0=1} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \boxed{S_1^0(\omega_2)=2} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & \boxed{S_1^1(\omega_1)=16} \\ \boxed{S_0^1=5} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \boxed{S_1^1(\omega_2)=10} \end{tikzcd}$$

In diesem Fall ist die Aktie systematisch dem Sparbuch überlegen, da ihre Endauszahlung stets mindestens das Doppelte des Startpreises ist. In diesem Modell kann Arbitrage generiert werden. Implementiert man z. B. im Zeitpunkt 0 *kostenneutral die Handelsstrategie* $\vartheta = (-5, 1)$, *d. h. kauft man eine Aktie auf Kredit, so erhält man gemäß (2) das Endvermögen* $V_1^\vartheta(\omega_1) = 6 > 0$ *bzw.* $V_1^\vartheta(\omega_2) = 0$. *Das ist Arbitrage! Die Strategie ist skalierbar ohne Verlustrisiko aber einer Chance auf einen beliebig hohen Gewinn. Ein solches Finanzmarktmodell wird nicht als sinnvoll angesehen.*

Die Finanzmathematik stellt nun Methoden zur Bewertung und (partiellen) Absicherung von Finanzprodukten (den *Contingent Claims*) bereit. Contingent Claims sind Verträge zwischen zwei Handelspartnern, die verbindlich Zahlungen festlegen, die zu einem zukünftigen Zeitpunkt geleistet werden. Die Höhe der Zahlungen wird in Abhängigkeit von zukünftigen Ereignissen spezifiziert. Contingent Claims umfassen sowohl Finanzderivate als auch Zahlungsströme, die sich im Kontext von Versicherungsverträgen ergeben. Im ersten Fall kann die Höhe der Zahlungen z. B. von der Kursentwicklung von Referenzprodukten abhängen. Als Basiswerte kommen dabei vor allem Aktien, Anleihen, Währungen, Rohstoffe und Indices in Frage. Im zweiten Fall werden Zahlungen durch das Eintreten und den Umfang von Schäden festgelegt.

Definition 2.5 *Ein Europäischer Contingent Claim mit Maturität* 1 *ist ein Finanzvertrag, der die im Zeitpunkt* 1 *fälligen Auszahlungen* $C_1(\omega)$ *für alle Szenarien* $\omega \in \Omega$ *festlegt. Mathematisch entspricht dies einer Zufallsvariablen* $C_1 : \Omega \to [0, \infty)$.

Zu den elementaren Beispielen zählen Call- und Put-Optionen.

- Eine *Europäische Call-Option* auf die Aktie mit *Maturität* 1 und *Strike* K ist ein Finanzvertrag, der dem Optionshalter das Recht einräumt, zum Zeitpunkt 1 eine Aktie zum Preis K zu erwerben. Dieses Recht wird von einem rationalen Akteur nur dann wahrgenommen, falls der Aktienkurs S_1^1 größer als K ist; anderenfalls ist der Preis der Aktie am Markt günstiger als der Strike. Als Auszahlung der Call-Option im Zeitpunkt 1 ergibt sich

$$C_1 = \max\{S_1^1 - K, 0\}.$$

  In der Praxis ist statt einer Übertragung des Basiswerts oft nur ein Ausgleich in Geld vereinbart (*cash settlement*).

- Eine *Europäische Put-Option* auf die Aktie mit *Maturität* 1 und *Strike* K verbrieft das Recht, zur Maturität eine Aktie zum Preis K verkaufen zu können. Dies entspricht der zufälligen Auszahlung

$$C_1 = \max\{K - S_1^1, 0\}.$$

Zwei Fragen stellen sich: Was ist der faire Preis C_0 eines Contingent Claims C_1 im Zeitpunkt 0? Wie kann sich der Emittent des Papiers gegen die zufällige Auszahlung C_1 absichern? Die Antworten auf beide Fragen sind eng miteinander verknüpft und können ausgehend von der Hypothese der Abwesenheit von Arbitrage formuliert werden.

Annahme 2.6 *Ein Preis* C_0 *eines Contingent Claims* C_1 *ist* <u>*fair*</u>, *wenn im Finanzmarktmodell, das um den Contingent Claim mit Preisprozess* (C_0, C_1) *erweitert wird, keine Arbitrage entsteht.*

Dieser Bewertungsansatz ist eng verbunden mit den *Kosten der perfekten Replikation.*

Definition 2.7 *Ein Contingent Claim C_1 wird replizierbar genannt, falls eine Handelsstrategie $\vartheta = (\vartheta^0, \vartheta^1)$ existiert, deren Endvermögen V_1^ϑ in jedem Szenario mit der Auszahlung C_1 übereinstimmt. In diesem Fall heißt ϑ replizierende Handelsstrategie, und die Kosten der Replikation sind gegeben durch das Anfangsinvestment V_0^ϑ.*

Das folgende Beispiel zeigt, wie die Replikationsstrategie berechnet wird.

Beispiel 2.8 *Der Contingent Claim sei durch $C_1(\omega_1) = 12$, $C_1(\omega_2) = 4$ definiert. Der Ansatz $V_1^\vartheta = C_1$ und die szenarioabhängige Auswertung von (2) liefern das lineare Gleichungssystem*

$$\vartheta^0 S_1^0 + \vartheta^1 S_1^1(\omega_1) = C_1(\omega_1) \tag{3a}$$

$$\vartheta^0 S_1^0 + \vartheta^1 S_1^1(\omega_2) = C_1(\omega_2) \tag{3b}$$

für die replizierende Strategie ϑ. Durch Einsetzen der bekannten Werte im Modell von Seite 5 nimmt dieses die Form

$$\vartheta^0 2 + \vartheta^1 16 = 12$$
$$\vartheta^0 2 + \vartheta^1 8 = 4$$

an, und man erhält die Lösung $\vartheta^0 = -2$, $\vartheta^1 = 1$. Die Replikationsstrategie besteht also im Kauf einer Aktie und der Kreditaufnahme von 2. Das hierfür erforderliche Anfangskapital ist gemäß (1)

$$V_0^\vartheta = -2S_0^0 + 1S_0^1 = -2 \cdot 1 + 1 \cdot 5 = \underline{3}$$

und entspricht dem eindeutigen fairen (d. h. arbitragefreien) Preis C_0 des Contingent Claims C_1.

Wie kann man man das begründen? Angenommen, es gelte $C_0 > V_0^\vartheta$. In diesem Fall könnte man zum Zeitpunkt 0 eine Einheit von C_1 zum Preis C_0 verkaufen, die Absicherungsstrategie ϑ für C_1 zum Preis V_0^ϑ implementieren und das freie Kapital $C_0 - V_0^\vartheta > 0$ in das Sparbuch investieren. Diese Strategie ist zum Zeitpunkt 0 kostenneutral. Im Zeitpunkt 1 muss nun die durch den Verkauf des Contingent Claims eingegangene Zahlungsverpflichtung C_1 erfüllt werden, die Absicherungsstrategie liefert das Endvermögen $V_1^\vartheta = C_1$ und die Anlage im Sparbuch bringt den Ertrag $S_1^0(C_0 - V_0^\vartheta)$. Netto bleibt also der risikofreie Gewinn $S_1^0(C_0 - V_0^\vartheta) > 0$, d. h. ein Preis $C_0 > V_0^\vartheta$ ist nicht konsistent mit der Abwesenheit von Arbitrage. Mit analogen Argumenten sieht man, dass auch im Fall $C_0 < V_0^\vartheta$ Arbitrage generiert werden kann.

Dieses Beispiel illustriert das folgende allgemeingültige Prinzip. Existiert keine Arbitrage, dann gilt für jeden replizierbaren Contingent Claim C_1:

$$\boxed{\textbf{arbitragefreier Preis } C_0 = \textbf{Kosten der perfekten Replikation}}$$

Im einfachen Beispiel konnte die Replikationsstrategie mittels eines Systems (3) von zwei linearen Gleichungen und zwei Unbekannten ermittelt werden. Dieses Gleichungssystem ist im einfachen Einperiodenmodell mit zwei Zuständen für jeden Contingent Claim $C_1(\omega_1) = c_1$, $C_1(\omega_2) = c_2$ lösbar, d. h. jeder Contingent Claim ist replizierbar.

Definition 2.9 *Ein Finanzmarktmodell, in dem jeder Contingent Claim replizierbar ist, heißt* vollständig.

In komplexeren Mehrperiodenmodellen ist die Berechnung der Replikationsstrategie aufwändiger und erfordert die rekursive Lösung mehrerer Gleichungssysteme oder die Anwendung von Martingalmethoden.

Die Bewertung von Contingent Claims lässt sich von der Replikation entkoppeln mittels der *risikoneutralen Bewertung*. Im Einperiodenmodell bringt dieses alternative Bewertungsverfahren keine signifikanten Vorteile. In komplexeren realistischeren Modellen ergeben sich aber substantielle Vereinfachungen durch diese Technik. Für eine transparente konzeptionelle Beschreibung der risikoneutralen Bewertung ist das Einperiodenmodell jedoch gut geeignet. Der faire Preis ist genau wie im Äquivalenzprinzip der klassischen Versicherungsmathematik ein (bedingter) Erwartungswert aller zukünftigen diskontierten Auszahlungen. Jedoch müssen erstens alle Erwartungswerte nicht unter dem statistischen, sondern unter einem *risikoneutralen Maß* berechnet werden. Zweitens erfolgt die Diskontierung mittels eines *Numéraires*, eines Referenzprodukts. Dieses formalisiert, dass ökonomisch nur relative Preise relevant sind, nicht jedoch Preise in bestimmten Geldeinheiten (z. B. € oder DM). Als Numéraire im Einperiodenmodell sei das Sparbuch[2] gewählt.

Definition 2.10 *Ein* risikoneutrales Maß *bezüglich des Numéraires S^0 ist ein technisches Wahrscheinlichkeitsmaß Q mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Für alle $\omega \in \Omega$ ist $Q[\{\omega\}] > 0$.*
2. *Für alle primären Finanzprodukte gilt*

$$\frac{S_0^i}{S_0^0} = E_Q\left[\frac{S_1^i}{S_1^0}\right] := Q[\{\omega_1\}]\frac{S_1^i}{S_1^0}(\omega_1) + Q[\{\omega_2\}]\frac{S_1^i}{S_1^0}(\omega_2), \quad i = 0, 1. \tag{4}$$

Eigenschaft 1 bedeutet, dass jedes mögliche Szenario ω auch bei der Preisberechnung einfließt (Äquivalenz der Maße P und Q). Die definierende Eigenschaft 2 besagt, dass sich für die primären Produkte, hier Sparbuch und Aktie, der diskontierte Preis zum Zeitpunkt 0 als mit den Q-Wahrscheinlichkeiten gewichtetes Mittel der diskontierten Preise zum Zeitpunkt 1 ergibt.[3] In der Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie heißen die diskontierten Preisprozesse dann Martingale[4] bezüglich des Maßes Q, und Q wird daher auch *äquivalentes Martingalmaß* genannt.

Konkret ergibt sich im diskutierten Einperiodenmodell mit Numéraire S^0 gemäß Formel (4) für ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß Q die definierende Gleichung

$$5 = Q[\{\omega_1\}]8 + Q[\{\omega_2\}]4,$$

die wegen der Nebenbedingung $Q[\{\omega_1\}] + Q[\{\omega_2\}] = 1$ die eindeutige Lösung

$$Q[\{\omega_1\}] = \tfrac{1}{4} \quad \text{und} \quad Q[\{\omega_2\}] = \tfrac{3}{4} \tag{5}$$

besitzt. Im arbitragefreien und vollständigen einfachen Finanzmarktmodell existiert somit genau ein risikoneutrales Maß. Diese Beobachtung gilt auch in der umgekehrten Richtung (siehe Abschnitt 2.4) und in komplexeren Finanzmarktmodellen (siehe Abschnitt 3).

Mithilfe des risikoneutralen Maßes Q kann der arbitragefreie Preis eines Contingent Claims berechnet werden, und zwar ohne zuvor die replizierende Handelsstrategie zu bestimmen.

Theorem 2.11 (Risikoneutrale Bewertungsformel) *Der eindeutige arbitragefreie Preis C_0 eines Contingent Claims C_1 im Zeitpunkt* 0 *ergibt sich durch risikoneutrale Bewertung bezüglich des risikoneutralen Maßes Q, d. h.*

$$C_0 = S_0^0 E_Q\left[\frac{C_1}{S_1^0}\right].$$

Der so berechnete Preis stimmt mit den Kosten der perfekten Replikation des Contingent Claims überein.

---

[2]Neben dem Sparbuch (oder allgemeiner Geldmarktfonds) sind auch andere Numéraires denkbar. So werden z. B. zur effizienten Bewertung von Optionen auf Bonds der Preisprozess einer Nullkuponanleihe als Numéraire und ein spezielles Martingalmaß, ein sogenanntes *Forwardmaß*, herangezogen; siehe z. B. Filipović [13], Kapitel 7.

[3]Wegen $S_0^0/S_0^0 = S_1^0/S_1^0 = 1$ ist Bedingung (4) für den Numéraire Sparbuch automatisch erfüllt. Es verbleibt, die Gewichtung $Q[\{\omega_1\}]$, $Q[\{\omega_2\}]$ anhand der diskontierten Aktienpreise zu bestimmen.

[4]Martingale sind ein Synonym für „faire Spiele“. Fair bedeutet, dass der erwartete zukünftige Wert des Spiels gleich dem aktuellen Wert ist; im Mittel gewinnt man nichts dazu, verliert aber auch nichts.

Das folgende Beispiel illustriert, dass die risikoneutrale Bewertungsformel in der Tat konsistent mit der Bewertung durch perfekte Replikation ist.

Beispiel 2.12 *Beispiel 2.8 zeigt, dass der Contingent Claim $C(\omega_1) = 12$, $C(\omega_2) = 4$ mit dem Anfangsinvestment $V_0^\vartheta = 3$ replizierbar ist, und dass diese Kosten der Replikation dem eindeutigen arbitragefreien Preis C_0 entsprechen. Alternativ berechnet man mit risikoneutraler Bewertung und den Gewichten in (5):*

$$\begin{aligned} C_0 = S_0^0 \cdot E_Q\left[\tfrac{C}{S_1^0}\right] =& S_0^0 \cdot \left(Q[\{\omega_1\}]\tfrac{C_1(\omega_1)}{S_1^0} + Q[\{\omega_2\}]\tfrac{C_1(\omega_2)}{S_1^0}\right) \\ =& 1 \cdot \left(\tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{12}{2} + \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{4}{2}\right) = \underline{3}. \end{aligned}$$

2.3 Ein einfaches Einperiodenmodell mit drei Zuständen

In der Realität und in vielen komplexeren Modellen können nicht alle Contingent Claims perfekt repliziert werden. Viele Risiken werden nicht durch primäre Finanzprodukte abgebildet. Der Markt ist unvollständig. In diesem Fall impliziert die Abwesenheit von Arbitrage oft keinen eindeutigen fairen Preis, sondern liefert ein Intervall fairer Preise.

Die Unvollständigkeit von Märkten und ihre Konsequenzen für die Bewertung und Absicherung von Produkten lassen sich bereits im Kontext von Einperiodenmodellen illustrieren. Zu diesem Zweck wird wiederum ein Einperiodenmodell mit den primären Produkten „Sparbuch“ S^0 und „Aktie“ S^1 betrachtet. Im Gegensatz zum vorhergehenden Abschnitt sind in der Modellwelt nun drei Szenarien $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ möglich, denen unter dem statistischen Maß P strikt positive Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden. Dies bedeutet formal $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Die Preisdynamik der primären Produkte wird modelliert durch:

$$\begin{tikzcd} & \boxed{S_1^0(\omega_1) = 2} \\ \boxed{S_0^0 = 1} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \boxed{S_1^0(\omega_2) = 2} \\ & \boxed{S_1^0(\omega_3) = 2} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \boxed{S_1^1(\omega_1) = 16} \\ \boxed{S_0^1 = 5} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \boxed{S_1^1(\omega_2) = 8} \\ & \boxed{S_1^1(\omega_3) = 8} \end{tikzcd}$$

Hierbei ist die Wertentwicklung des Sparbuchs nach wie vor unabhängig vom zukünftigen Zustand ω der Welt. Der Aktienkurs hingegen entwickelt sich szenarioabhängig, wobei für den Kurs der Aktie S_1^1 irrelevant ist, ob Szenario ω_2 oder ω_3 eintritt. Die Hinzunahme eines weiteren Szenarios ist auf den ersten Blick nur eine kleine Modifikation, hat jedoch gravierende Konsequenzen für die Eigenschaften des Finanzmarktmodells. Das Modell mit drei Szenarien bleibt zwar arbitragefrei, jedoch gibt es nun Contingent Claims C_1, die nicht durch Handel mit den primären Produkten replizierbar sind.

Beispiel 2.13 *Der durch $C_1(\omega_1) = 24$, $C_1(\omega_2) = 16$ und $C_1(\omega_3) = 8$ spezifizierte Contingent Claim ist nicht replizierbar. Mit anderen Worten, es existiert keine Handelsstrategie $\vartheta = (\vartheta^0, \vartheta^1)$ mit Endwert $V_1^\vartheta = C_1$. Mathematisch bedeutet dies, dass das lineare Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} \vartheta^0 S_1^0 + \vartheta^1 S_1^1(\omega_1) =& C_1(\omega_1) \\ \vartheta^0 S_1^0 + \vartheta^1 S_1^1(\omega_2) =& C_1(\omega_2) \\ \vartheta^0 S_1^0 + \vartheta^1 S_1^1(\omega_3) =& C_1(\omega_3) \end{aligned}$$

mit drei Gleichungen und zwei Unbekannten keine Lösung $(\vartheta^0, \vartheta^1)$ besitzt.

Definition 2.14 *Ein Finanzmarktmodell, in dem mindestens ein Contingent Claim nicht replizierbar ist, heißt unvollständig.*

Eine Abgrenzung zwischen replizierbaren und nichtreplizierbaren Contingent Claims ergibt sich unmittelbar aus Beispiel 2.13. Replizierbare Contingent Claims haben Endauszahlungen der Form

$$C_1(\omega) = \vartheta^0 S_1^0 + \vartheta^1 S_1^1(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

und einen eindeutigen fairen Preis C_0, der durch die Kosten der perfekten Replikation

$$V_0^\vartheta = \vartheta^0 S_0^0 + \vartheta^1 S_0^1 \tag{6}$$

gegeben ist. Alle übrigen Contingent Claims sind nicht replizierbar. Für diese Claims kann eine arbitragefreie Bewertung nicht mehr auf Basis der perfekten Replikation erfolgen. Die risikoneutrale Bewertung von Contingent Claims besitzt jedoch weiterhin Gültigkeit; ihre Interpretation muss dabei modifiziert werden.

Zunächst müssen alle risikoneutralen Maße (siehe Definition 2.10) bestimmt werden: diese sind die technischen Wahrscheinlichkeitsmaße Q mit der Eigenschaft

$$\tfrac{S_0^1}{S_0^0} = E_Q\left[\tfrac{S_1^1}{S_1^0}\right] := Q[\{\omega_1\}]\tfrac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_1) + Q[\{\omega_2\}]\tfrac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_2) + Q[\{\omega_3\}]\tfrac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_3). \tag{7}$$

Durch Einsetzen der Werte im konkreten Modell ergibt sich unter der Nebenbedingung $Q[\{\omega_1\}] + Q[\{\omega_2\}] + Q[\{\omega_3\}] = 1$:

$$\begin{aligned} 5 =& Q[\{\omega_1\}] \cdot \tfrac{16}{2} + Q[\{\omega_2\}] \cdot \tfrac{8}{2} + Q[\{\omega_3\}] \cdot \tfrac{8}{2} \\ =& Q[\{\omega_1\}] \cdot \tfrac{16}{2} + (1 - Q[\{\omega_1\}]) \cdot \tfrac{8}{2}. \end{aligned}$$

Es folgt $Q[\{\omega_1\}] = 1/4$ und $Q[\{\omega_2\}] + Q[\{\omega_3\}] = 3/4$. Jede Aufteilung $Q[\{\omega_2\}] = \frac{3}{4}\alpha$, $Q[\{\omega_3\}] = \frac{3}{4}(1-\alpha)$ mit $\alpha \in (0,1)$ definiert ein risikoneutrales Maß.

Die Menge der risikoneutralen Maße $\mathcal{Q}$ besteht somit aus überabzählbar unendlich vielen Elementen und ist gegeben durch

$$\mathcal{Q} = \left\{Q_\alpha : \quad Q_\alpha[\{\omega_1\}] = \tfrac{1}{4},\ Q_\alpha[\{\omega_2\}] = \tfrac{3}{4}\alpha,\ Q_\alpha[\{\omega_3\}] = \tfrac{3}{4}(1-\alpha) \quad \text{mit } \alpha \in (0,1)\right\}.$$

Die Existenz unendlich vieler risikoneutraler Maße ist charakteristisch für unvollständige Finanzmarktmodelle.

Man kann nun zeigen, dass jedes der risikoneutralen Maße Q_α durch die Formel

$$C_{0,\alpha} := S_0^0 E_{Q_\alpha}\left[\tfrac{C_1}{S_1^0}\right]$$

einen Preis $C_{0,\alpha}$ für den Contingent Claim C_1 liefert, der konsistent mit der Abwesenheit von Arbitrage ist. Mit anderem Worten, es gibt eine ganze Klasse fairer (d. h. arbitragefreier) Preise, nämlich

$$\mathcal{C}_0 := \left\{S_0^0 E_{Q_\alpha}\left[\tfrac{C_1}{S_1^0}\right] \big| Q_\alpha \in \mathcal{Q}\right\}.$$

Die Werte

$$C_0^{\inf} := \inf_{Q \in \mathcal{Q}} S_0^0 E_Q\left[\tfrac{C_1}{S_1^0}\right] \quad \text{und} \quad C_0^{\sup} := \sup_{Q \in \mathcal{Q}} S_0^0 E_Q\left[\tfrac{C_1}{S_1^0}\right]$$

können als Arbitragepreisgrenzen interpretiert werden.

Wie sieht die Menge $\mathcal{C}_0$ für replizierbare und nicht replizierbare Contingent Claims aus? Ein allgemeines Prinzip kann durch folgende zwei Fallstudien illustriert werden.

Beispiel 2.15 (replizierbarer Contingent Claim) *Der Contingent Claim mit den Endauszahlungen $C_1(\omega_1) = 12$, $C_1(\omega_2) = 4$ und $C_1(\omega_3) = 4$ wird durch den Kauf einer Aktie und eine Kreditaufnahme von 2, also durch die Handelsstrategie $\vartheta = (-2, 1)$, repliziert. Für die Replikation entstehen* *gemäß (6) die Kosten $V_0^\vartheta = 3$. Alternativ ergibt die risikoneutrale Bewertung mithilfe eines beliebigen risikoneutralen Maßes*

$$\begin{aligned} C_{0,\alpha} =& S_0^0 \left(Q_\alpha[\{\omega_1\}] \tfrac{C_1(\omega_1)}{S_1^0} + Q_\alpha[\{\omega_2\}] \tfrac{C_1(\omega_2)}{S_1^0} + Q_\alpha[\{\omega_3\}] \tfrac{C_1(\omega_3)}{S_1^0} \right) \\ =& 1 \left(\tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{12}{2} + \tfrac{3}{4}\alpha \cdot \tfrac{4}{2} + \tfrac{3}{4}(1-\alpha) \cdot \tfrac{4}{2} \right) = \underline{3}, \end{aligned}$$

und dieser Wert hängt nicht von der Wahl des risikoneutralen Maßes Q_α, $\alpha \in (0,1)$, ab. Mit anderen Worten, die Menge der arbitragefreien Preise besteht nur aus einem Element, nämlich den Kosten der perfekten Replikation.

Beispiel 2.16 (nicht replizierbarer Contingent Claim) *Für den nichtreplizierbaren Contingent Claim $C_1(\omega_1) = 24$, $C_1(\omega_2) = 16$ und $C_1(\omega_3) = 8$ aus Beispiel 2.13 berechnet man unter dem risikoneutralen Maß Q_α den arbitragefreien Preis*

$$\begin{aligned} C_{0,\alpha} =& S_0^0 \left(Q_\alpha[\{\omega_1\}] \tfrac{C_1(\omega_1)}{S_1^0} + Q_\alpha[\{\omega_2\}] \tfrac{C_1(\omega_2)}{S_1^0} + Q_\alpha[\{\omega_3\}] \tfrac{C_1(\omega_3)}{S_1^0} \right) \\ =& 1 \left(\tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{24}{2} + \tfrac{3}{4}\alpha \cdot \tfrac{16}{2} + \tfrac{3}{4}(1-\alpha) \cdot \tfrac{8}{2} \right) \\ =& \underline{6 + 3\alpha}. \end{aligned}$$

Dieser hängt explizit von $\alpha \in (0,1)$ ab. Man erhält die Menge der arbitragefreien Preise $\mathcal{C}_0 = (6,9)$, also ein ganzes Preisintervall.

Die Beispiele 2.15 und 2.16 illustrieren die folgende Dichotomie, die auch in komplexeren unvollständigen Finanzmärkten Gültigkeit besitzt.

Theorem 2.17 (arbitragefreie Preise) *Für einen Contingent Claim C_1 gelten die Aussagen:*

1. *Der Contingent Claim C_1 ist replizierbar genau dann, wenn er einen eindeutigen arbitragefreien Preis C_0 besitzt. Dieser entspricht den Kosten der perfekten Replikation.*

2. *Ist C_1 nicht replizierbar, so gilt $C_0^{\text{inf}} < C_0^{\text{sup}}$ und die Menge der arbitragefreien Preise bildet das offene Intervall*

$$(C_0^{\text{inf}}, C_0^{\text{sup}}) = \left(\inf_{Q \in \mathcal{Q}} S_0^0 E_Q \left[\tfrac{C_1}{S_1^0} \right], \sup_{Q \in \mathcal{Q}} S_0^0 E_Q \left[\tfrac{C_1}{S_1^0} \right] \right).$$

In unvollständigen Finanzmärkten sind bestimmte Contingent Claims C_1 nicht perfekt replizierbar. Daraus ergibt sich die natürliche Fragestellung: Wie kann sich ein Emittent eines Contingent Claims trotzdem (zumindest partiell) gegen die die Auszahlung C_1 absichern?

Ein Ansatz ist das sogenannte *Superhedging*[5], eine Art „Überabsicherung“. Unter einer Superhedgingstrategie versteht man eine Handelsstrategie ϑ, deren Endvermögen V_1^ϑ in jedem Szenario die Auszahlung des Contingent Claims dominiert. Formal ausgedrückt:

$$V_1^\vartheta(\omega) = \vartheta^0 S_1^0 + \vartheta^1 S_1^1(\omega) \geq C_1(\omega) \quad \text{für alle } \omega \in \Omega. \tag{8}$$

Man kann zeigen, dass eine solche Superhedgingstrategie stets existiert und dass das minimal erforderliche Anfangsinvestment gerade durch die obere Arbitragepreisgrenze C_0^{sup} gegeben ist. Man nennt C_0^{sup} daher auch *Superhedgingpreis*.

[5]In dynamischen Marktmodellen gehen die theoretischen Grundlagen des Superhedgings u. a. auf Arbeiten von El Karoui & Quenez [10] und Kramkov [27] zurück.

Beispiel 2.18 *Der Contingent Claim* $C_1(\omega_1) = 24$*,* $C_1(\omega_2) = 16$*,* $C_1(\omega_3) = 8$ *aus den Beispielen 2.13 und 2.16 ist nicht replizierbar, und der Superhedgingpreis beträgt* $C_0^{\mathrm{sup}} = 9$*. Dies ist das minimale Anfangskapital für eine Superhedgingstrategie* ϑ*, d. h. es gilt* $9 = V_0^\vartheta = \vartheta^0 S_0^0 + \vartheta^1 S_0^1$ *bzw.*

$$\vartheta^0 = 9 - 5\vartheta^1.$$

Mit dieser Beziehung liefert die szenarioabhängige Auswertung der Superhedgingbedingung (8) für die Einheiten der Aktie ϑ^1 *das „Ungleichungssystem"*

$$\begin{aligned}(9 - 5\vartheta^1) \cdot 2 + \vartheta^1 \cdot 16 \geq& 24,\\ (9 - 5\vartheta^1) \cdot 2 + \vartheta^1 \cdot 8 \geq& 16,\\ (9 - 5\vartheta^1) \cdot 2 + \vartheta^1 \cdot 8 \geq& 8.\end{aligned}$$

Die Ungleichungen 1 sowie 2 übersetzen sich in die Bedingungen $\vartheta^1 \geq 1$ *bzw.* $\vartheta^1 \leq 1$*, und Ungleichung 3 bedeutet* $\vartheta^1 \leq 5$*. Somit besteht die Superhedgingstrategie im Kauf von* $\vartheta^1 = 1$ *Aktien und der Investition von* $\vartheta^0 = 9 - 5\vartheta^1 = 4$ *Geldeinheiten ins Sparbuch.*

Die Implementierung einer Superhedgingstrategie ist in der Praxis in der Regel zu teuer. Stattdessen können partielle Absicherungen sinnvolle Alternativen darstellen. Ein Ansatz ist z. B. das *Quantilhedging*, das in den 90er Jahren von verschiedenen Autoren vorgeschlagen wurde. Diese Absicherungsmethode ist im Allgemeinen günstiger als das Superhedging. Beim Quantilhedging wird eine positive Wahrscheinlichkeit (unter dem statistischen Maß P) toleriert, mit der die Absicherungsstrategie für einen Contingent Claim versagt. Unter allen zulässigen Handelsstrategien kann man entweder bei vorgegebenem Anfangskapital die Wahrscheinlichkeit eines Hedgingfehlers minimieren. Oder man bestimmt bei vorgegebener Fehlerschranke die Strategie mit den geringsten Anfangskosten. Eine detaillierte Diskussion und Lösung dieser Probleme in vollständigen und unvollständigen zeitstetigen Finanzmarktmodellen finden sich in Föllmer & Leukert [15].

Quantilhedging berücksichtigt die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers bei einer partiellen Absicherung, nicht jedoch die Höhe des Verlustes $(C_1 - V_1^\vartheta)^+$ im Falle eines Verlustes. Dieses Defizit motiviert die Konstruktion alternativer Ansätze wie z. B. des *Efficient Hedgings*, das von Föllmer & Leukert [16] vorgeschlagen wurde. Beim *Efficient Hedging* wird der Hedgingfehler mittels einer Verlustfunktion l gemessen, die Verluste verschiedener Höhen gewichtet. Die Zielgröße

$$E_P[l((C_1 - V_1^\vartheta)^+)]$$

kann dann bei vorgegebenem Anfangskapital über alle Handelsstrategien ϑ minimiert werden. Umgekehrt kann man eine obere Schranke für den erwarteten Verlust fixieren und eine Handelsstrategie mit minimalen Kosten bestimmen, die die vorgegebene Verlustschranke einhält.

Erweiterungen des Quantilhedgings und *Efficient Hedgings* unter Berücksichtigung von Modellunsicherheit wurden von Kirch [24] analysiert. Weitere Arbeiten zum Thema *Efficient Hedging* sind z. B. Nakano [32], Cvitanic & Karatzas [7], Kirch & Runggaldier [25], Favero [11], Favero & Runggaldier [12], Schied [40, 41], Rudloff [38, 37], Sekine [42] und Klöppel & Schweizer [26]. Die Lösung des partiellen Absicherungsproblems erfordert z. B. im zeitstetigen Fall Dualitätsmethoden, stochastische Kontrolltheorie oder stochastische Rückwärtsdifferentialgleichungen. Ein Überblick zu diesem Thema und zum verwandten Thema der robusten Portfoliooptimierung findet sich in Föllmer, Schied & Weber [19].

2.4 Die risikoneutrale Bewertung im Überblick

Die vorgestellten Spielzeugmodelle sind für eine realistische Modellierung von Finanzmärkten nicht geeignet. Realistischer und flexibler sind Modelle mit mehreren primären Produkten, einer großen

Zahl von Szenarien Ω (oft unendlich vielen) und mehreren Handelszeitpunkten t, zu denen Portfolios readjustiert werden können. Beinhaltet ein Modell nur Handelszeitpunkte $t = 0, 1, \ldots T$ bis zu einer Maturität T, so spricht man von einem Modell in diskreter Zeit. Die Modellierung kann aber auch in stetiger Zeit erfolgen. Dies wird im Abschnitt 3 im Rahmen des Black-Scholes-Modells erläutert.

Die Kernaussagen zur Wertpapierbewertung lassen sich in diskreter Zeit wie folgt zusammenfassen. Die zufälligen Preise von $d + 1$ primären Finanzprodukten zu den Zeiten $t = 0, 1, \ldots, T$ seien mit $S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^d$ bezeichnet. Das 0-te Produkt hat strikt positive Preise (z. B. Sparbuch oder Geldmarktfonds) und wird als Numéraire gewählt.

Die Bewertung von Finanzprodukten zu verschiedenen Zeitpunkten hängt von der zur Verfügung stehenden Information ab. Symbolisch bezeichnet man die zum Zeitpunkt t zur Verfügung stehende Information oft mit $\mathcal{F}_t$, $t = 0, 1, \ldots, T$; mathematisch handelt es sich hierbei um eine Sigmaalgebra. $\mathcal{F}_t$ ist die Menge der Ereignisse (Teilmengen von Ω), für die zum Zeitpunkt t bekannt ist, ob sie eingetreten sind oder nicht. Die aufsteigende Familie der Informationsmengen $\mathcal{F}_t$, $t = 0, 1, \ldots, T$, heißt Informationsfiltration.

Ein risikoneutrales Maß Q muss im Mehrperiodenfall (als Erweiterung von (4)) die Bedingung

$$\frac{S_t^i}{S_t^0} = E_Q\left[\frac{S_{t+1}^i}{S_{t+1}^0} \middle| \mathcal{F}_t\right], \quad t = 0, 1, \ldots, T-1,\ i = 0, 1, \ldots, d,$$

erfüllen. Hierbei bezeichnet $E_Q[\cdot|\mathcal{F}_t]$ den Erwartungswert unter Q bedingt auf die in t verfügbare Information $\mathcal{F}_t$. Die Bedingung besagt, dass die diskontierten Preisprozesse der primären Produkte unter dem Martingalmaß Martingale sind.

Mithilfe der risikoneutralen Maße können die Abwesenheit von Arbitrage und Vollständigkeit beschrieben werden. Diese Charakterisierung nennt man *Fundamentalsätze der Wertpapierbewertung.*

Theorem 2.19 (1. Fundamentalsatz)[6] *Das Finanzmarktmodell ist arbitragefrei genau dann, wenn ein risikoneutrales Maß existiert.*

Die Existenz eines risikoneutralen Maßes in arbitragefreien Einperiodenmodellen wurde bereits in den vorhergehenden Abschnitten exemplarisch gezeigt. Das folgende Beispiel illustriert, dass in Modellen mit Arbitrage kein risikoneutrales Maß existiert.

Beispiel 2.20 *Das Finanzmarktmodell aus Beispiel 2.4 lässt Arbitragestrategien zu. Die definierende Gleichung (4) für die Einzelwahrscheinlichkeiten eines risikoneutralen Maßes Q hat nun die eindeutige Lösung $Q[\{\omega_1\}] = 0$, $Q[\{\omega_2\}] = 1$, d. h. das Maß Q ordnet dem Szenario ω_1 die Wahrscheinlichkeit* 0 *zu. Dies steht im Widerspruch zu Eigenschaft* 1 *der Definition 2.10, und folglich ist Q kein risikoneutrales Maß.*

Die Analyse der Einperiodenmodelle mit zwei bzw. drei Szenarien zeigt, dass es entweder genau ein oder unendlich viele risikoneutrale Maße gibt. Diese beiden Fälle korrespondieren mit der Vollständigkeit und der Unvollständigkeit der Marktmodelle.

Theorem 2.21 (2. Fundamentalsatz) *Ein arbitragefreies Finanzmarktmodell ist vollständig genau dann, wenn exakt ein risikoneutrales Maß existiert.*

Mithilfe der risikoneutralen Maße können wie zuvor Contingent Claims arbitragefrei bewertet werden.

[6]In zeitstetigen Finanzmarktmodellen benötigt man den allgemeineren Begriff der lokalen äquivalenten Martingalmaße (bzw. äquivalenten Sigma-Martingalmaße im Fall nicht lokal beschränkter Preisprozesse). Aus der Existenz eines solchen Maßes ergibt sich mühelos die Arbitragefreiheit des Finanzmarktmodells. Die Umkehrung dieser Aussage gilt jedoch im Allgemeinen nicht. Für die Existenz eines äquivalenten lokalen Martingalmaßes (bzw. äquivalenten Sigma-Martingalmaßes) ist eine stärkere Bedingung notwendig, nämlich „no free lunch with vanishing risk", siehe Delbaen & Schachermayer [8].

Theorem 2.22 (risikoneutrale Bewertung) *Es sei C_{T^*} ein Contingent Claim mit Maturität $T^* \leq T$, also ein Vertrag, der zum Zeitpunkt T^* szenarioabhängig die Auszahlungen $C_{T^*}(\omega)$, $\omega \in \Omega$, leistet. Dann definiert jedes risikoneutrale Maß Q im Bewertungszeitpunkt $t \leq T^*$ durch*

$$C_t := S_t^0 E_Q \left[\frac{C_{T^*}}{S_{T^*}^0} | \mathcal{F}_t \right]$$

einen arbitragefeien Preis.

Analog zu Theorem 2.17 gilt hierbei, dass C_{T^*} genau dann replizierbar ist, wenn es exakt einen arbitragefreien Preis C_t gibt. Dieser entspricht den Kosten der perfekten Replikation im Zeitpunkt t durch eine selbstfinanzierende Handelsstrategie. Der Claim C_{T^*} ist hingegen genau dann nicht replizierbar, wenn die Menge der arbitragefreien Preise ein nichtleeres offenes Intervall bildet.

Einen detaillierten Überblick zum *Asset Princing* im zeitdiskreten Fall bietet die Monographie von Föllmer & Schied [18]. Eine allgemeine Darstellung der *Fundamentalsätze der Wertpapierbewertung* und des *Asset Pricings*, die sowohl den zeitdiskreten als auch den zeitstetigen Fall allgemeiner Semimartingal-Preisprozesse umfasst, findet sich in der Monographie von Delbaen & Schachermayer [8]. Anwendungen im Bereich der Personenversicherungsmathematik werden in Møller & Steffensen [30] analysiert.

3 Black-Scholes-Modell

Die wesentlichen Grundideen zur Bewertung und Absicherung von Finanzprodukten wurden Anfang der 70er Jahre von Fischer Black, Robert C. Merton und Myron S. Scholes im Kontext des Black-Scholes-Modells entwickelt. Dieselben Grundkonzepte, die im zeitdiskreten Fall bereits erläutert worden sind, können auch erfolgreich in diesem einfachen Modell in stetiger Zeit und modernen, komplexeren Modellen angewendet werden. Das Finanzmarktmodell von Black, Merton und Scholes geht auf den Ökonomen Paul A. Samuelson[7] (*1915 - †2009) zurück, der dieses 1965 in einem Artikel [39] als Weiterentwicklung des Bachelier-Modells vorgeschlagen hat. Als Begründer der modernen Finanzmathematik werden daher sowohl Louis Bachelier mit seiner Dissertation [3] aus dem Jahr 1900 als auch Samuelson, Black, Scholes und Merton genannt.

Das Black-Scholes-Modell ist ein Modell eines Finanzmarktes, auf dem zwei primäre Finanzprodukte gehandelt werden: Investoren können ihr Geld zu einem festen Zins anlegen (diese Investitionsmöglichkeit sei mit einem „Sparbuch" assoziiert) oder Aktienanteile kaufen. Zeit wird im Modell als kontinuierlich modelliert und korrespondiert zu einem Zeitintervall $[0, T]$ für ein $T > 0$. Im Black-Scholes-Modell – aber auch oft in komplexeren Modellen – werden, wie bereits auf Seite 5 dargestellt, eine Reihe vereinfachender Annahmen gemacht.

Wie in zeitdiskreten Modellen muss auch in zeitstetigen Modellen die Preisdynamik der primären Produkte festgelegt werden. Das Sparbuch im Black-Scholes-Modell verzinst Einlagen stetig mit einem festen Zinssatz $r > 0$. Die Wertentwicklung eines Anfangsinvestments von 1 wird also beschrieben durch

$$S_t^0 = \exp(rt), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Der obere Index bezeichnet die „Wertpapierkennnummer" des Produkts. Wie bisher steht „0" für Sparbuch. Die Aktie ist das Produkt mit Wertpapierkennnummer „1" und mit Preisprozess $(S_t^1)_{0 \leq t \leq T}$. Im Black-Scholes-Modell wird die Dynamik des Aktienpreises durch eine *geometrische Brownsche Bewegung* beschrieben.

Die Brownsche Bewegung ist ein wichtiger Baustein in der Theorie zeitstetiger stochastischer Prozesse, der die zufälligen Schwankungen im Modell antreibt. Das Modell selbst spezifiziert, wie sich dieser zufällige Einfluss auf die betrachteten Objekte, z. B. die Preisprozesse, auswirkt. Die

[7] Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften 1970

Brownsche Bewegung ist ein spezieller stochastischer Prozess, dessen raue Pfade zumindest lokal sehr an die Kursentwicklung von Aktienindizes erinnern. Dieses wird in Abbildung 1 illustriert.

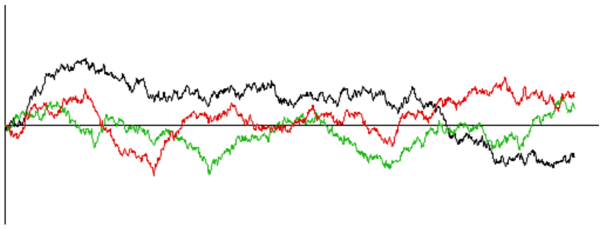

Abbildung 1: Pfade einer Brownschen Bewegung

Die Brownsche Bewegung hat eine einfache Struktur und ist deswegen mathematisch leicht zu handhaben. Für Aktienkurse stellt sie selbst jedoch aus einer Vielzahl von Gründen kein gutes Modell dar. Beispielsweise können ihre Pfade negativ werden (= negative Preise). Im Gegensatz zu Samuelson hatte Bachelier in seiner Dissertation im Jahr 1900 Preisprozesse durch eine Brownsche Bewegung beschrieben. Im Black-Scholes-Modell bildet diese stattdessen nur den Grundbaustein.

Eine Brownsche Bewegung kann als eine Art zeitstetiger Random Walk interpretiert werden. Ein Random Walk $(S_n)_{n=0,1,\ldots}$ ist ein einfacher Prozess in diskreter Zeit, der durch Summation

$$S_n := X_1 + \ldots + X_n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen X_n, $n \in \mathbb{N}$, entsteht. Genau wie die Brownsche Bewegung im zeitstetigen Fall kann ein Random Walk als Baustein im zeitdiskreten Fall verwendet werden, um realistische Modelle zu konstruieren. Ein symmetrischer Random Walk auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $P[X_n = 1] = P[X_n = -1] = \frac{1}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$ etwa kann durch ein wiederholtes Münzwurfexperiment konstruiert werden. Zu jedem Zeitpunkt entscheidet man durch Münzwurf, ob der Pfad des Prozesses um 1 wächst oder um 1 fällt. Die zwei Alternativen muss man den Ereignissen „Kopf“ und „Zahl“ zuordnen. Pfade eines Random Walks sind in Abbildung 2 dargestellt.

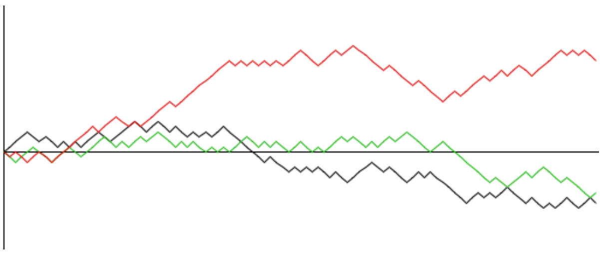

Abbildung 2: Pfade eines Random Walks

Der Zusammenhang von Random Walks und der Brownschen Bewegung wird durch ein Invarianzprinzip beschrieben, das auf Monroe David Donsker (*1925 - †1991) zurückgeht [9].

Theorem 3.1 (Donskers Invarianzprinzip, Funktionaler Zentraler Grenzwertsatz) *Es sei* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *mit Erwartungswert* $E[X_k] = 0$ *sowie Varianz* $Var[X_k] = 1$*, und* $(S_n)_{n=0,1,\ldots}$ *bezeichne den zugehörigen Random Walk. Dann ist durch*

$$B_t^n := \frac{1}{\sqrt{n}}(S_{\lfloor nt\rfloor} + (nt - \lfloor nt\rfloor)X_{\lfloor nt\rfloor+1}), \quad t \in [0, 1],$$

ein stochastischer Prozess in stetiger Zeit mit stetigen Pfaden definiert, der – aufgefasst als $C([0, 1])$*-wertige Zufallsgröße – in Verteilung gegen eine Brownsche Bewegung* $(W_t)_{t\in[0,1]}$ *konvergiert.*

Im in Abbildung 2 betrachteten Random Walk wächst oder fällt der Wert des Prozesses um 1 in Zeitfenstern der Länge 1. Zufall bestimmt die Bewegung des Prozesses mit einer festen Taktfrequenz von 1. Erhöht man diese Frequenz, indem man die Zeitfenster zwischen den Münzwürfen verkleinert, und hält man gleichzeitig die Varianz für feste Zeitintervalle konstant, indem man die Sprunghöhen verkleinert, so ergibt sich ein Random Walk, der schneller hin- und herschwankt. Bei sehr hoher Taktfrequenz sieht das konstruierte Objekt einer Brownschen Bewegung sehr ähnlich. Donskers Theorem besagt mathematisch exakt, dass man bei unendlicher Frequenz der Münzwürfe und ständigen zufälligen Innovationen eine Brownsche Bewegung als Grenzfall der reskalierten Random Walks erhält. – Die Brownsche Bewegung kann folgendermaßen definiert werden:

Definition 3.2 *Eine Brownsche Bewegung ist ein stochastischer Prozess $W = (W_t)_{t \geq 0}$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Für P-fast alle Szenarien $\omega \in \Omega$ gilt $W_0(\omega) = 0$.*

2. *Für alle $t > 0$ ist $W_t \sim \mathcal{N}(0,t)$, d. h.*

$$P[W_t \leq x] = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right),$$

   wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung ist.

3. *Die Inkremente sind unabhängig und stationär:*

   – *Für alle $t < s$ stimmen die Verteilung des Inkrements $W_s - W_t$ und die Verteilung von W_{s-t} überein.*

   – *Für alle $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ sind $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ unabhängig.*

4. *Der Pfad $t \to W_t(\omega)$ ist stetig für fast alle $\omega \in \Omega$.*

Eigenschaft 1 besagt, dass die Brownsche Bewegung $W = (W_t)_{t \geq 0}$ in 0 startet. Ihr Wert W_t zu einem festen zukünftigen Zeitpunkt $t > 0$ ist zufällig und normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz t (Eigenschaft 2). Die Änderung des Werts der Brownschen Bewegung über ein festes Zeitfenster wird als Inkrement bezeichnet. Die Zufallsvariable $W_t - W_s$ ist das Inkrement zum Zeitfenster $[s,t]$ mit $0 \leq s < t$. Eigenschaft 3 spezifiziert, dass diese Inkremente normalverteilt sind mit Erwartungswert 0 und Varianz $t - s$, also der Länge des Zeitfensters. Gleichzeitig beeinflussen sich die Inkremente der Brownschen Bewegung nicht, wenn man diese für disjunkte Zeitfenster betrachtet. Eigenschaft 4 beschreibt die Stetigkeit der Pfade.

Der Aktienpreisprozess im Black-Scholes-Modell ist eine *geometrische Brownsche Bewegung*, die stetige Pfade besitzt und deren Dynamik von einer Brownschen Bewegung W getrieben wird:

$$S_t^1(\omega) = S_0 \exp\left(\sigma W_t(\omega) + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t\right), \quad \omega \in \Omega.$$

Diese Beschreibung impliziert auch die Verteilungseigenschaften des Aktienpreisprozesses S^1 unter dem statistischen Maß P. Returns sind in diesem Fall normalverteilt und Aktienpreise lognormalverteilt.

Die Informationsfiltration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)$ wird durch die Beobachtung des Aktienpreisprozesses und damit von der Brownschen Bewegung generiert. Wie in den diskutierten diskreten Modellen kann man auch im Black-Scholes-Modell selbstfinanzierende Handelsstrategien definieren, die Investitionen in die primären Produkte, Sparbuch und Aktie, beschreiben. Im Gegensatz zum diskreten Fall können Stückzahlen jederzeit adjustiert werden: eine kontinuierliche Anpassung des Portfolios ist im Black-Scholes-Modell möglich. Mathematisch beruhen die erforderlichen Herleitungen auf dem Itô-Kalkül, dessen Grundlagen in den 40er Jahren von Kiyoshi Itô [22] entwickelt worden sind.[8]

Man kann nachweisen, dass sich im Black-Scholes-Modell jedes Derivat mittels einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie replizieren lässt – das Modell ist vollständig. Jedes Derivat kann somit unter der Annahme der Abwesenheit von Arbitrage bewertet werden: sein Preis sind die Kosten der perfekten Replikation. Das Konzept der Martingalmaße, das im zeitdiskreten Fall bereits diskutiert wurde, lässt sich auf zeitstetige Modelle wie das Black-Scholes-Modell erweitern.

Im Black-Scholes-Modell wählt man typischerweise das Sparbuch als Numéraire. Die Konstruktion des eindeutigen äquivalenten Martingalmaßes erfolgt nun mit Methoden der *Stochastischen Analysis*. Mithilfe der Itô-Formel ergibt sich für den diskontierten Aktienpreisprozess $\widetilde{S}^1_t := e^{-rt} S^1_t$ die stochastische Differentialgleichung (SDE)

$$d\widetilde{S}^1_t = \widetilde{S}^1_t (\sigma \, dW_t + (\mu - r) \, dt) \tag{9}$$

bzw. in integrierter Form

$$\widetilde{S}^1_t = \widetilde{S}^1_0 + \int_0^t \widetilde{S}^1_u \sigma \, dW_u + \int_0^t \widetilde{S}^1_u (\mu - r) \, du.$$

Das Integral bezüglich der Brownschen Bewegung ist (pfadweise) kein klassisches Integral z. B. a la Stieltjes, da die Pfade der Brownschen Bewegung sehr „rauh und wild“, also insbesondere nicht lokal von endlicher Variation sind. Es handelt sich hierbei um ein stochastisches Integral bzw. Itô-Integral, das in allgemeinerer Form für Integratoren aus der Klasse der Semimartingale wohldefiniert ist. Itô-Integrale bezüglich der Brownschen Bewegung sind (lokale) Martingale, und der Itô'sche Martingaldarstellungssatz besagt, dass umgekehrt jedes stetige lokale Martingal als Itô-Integral bezüglich der Brownschen Bewegung dargestellt werden kann. Mit Blick auf die SDE (9) für den diskontierten Preisprozess $\widetilde{S}^1$ ist das Martingalmaß Q also so zu konstruieren, dass $W^*_t := W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$, $t \in [0, T|$, unter Q eine Brownsche Bewegung ist. Als Werkzeug dient der Satz von Girsanov.[9]

Theorem 3.3 (Satz von Girsanov für die Brownsche Bewegung – einfacher Spezialfall) *Für $b \in \mathbb{R}$ sei das Maß P^* über $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ durch die Radon-Nikodym-Dichte*

$$\tfrac{dP^*}{dP} = \exp(bW_T - \tfrac{1}{2} b^2 T)$$

festgelegt, d. h. für jedes Ereignis $A \in \mathcal{F}_T$ gilt

$$P^*[A] = \int_A \tfrac{dP^*}{dP} \, dP.$$

Dann ist der Prozess $W^*_t := W_t - bt$, $t \in [0, T]$, eine Brownsche Bewegung unter dem Maß P^*.

[8] In den späten 30er Jahren entwickelte außerdem Wolfgang Döblin (*1915 - †1940) eng verwandte Resultate. Seine Aufzeichnungen zu diesem Thema wurden jedoch erst im Jahr 2000 entdeckt – sechzig Jahre nach seinem Tod. Wolfgang Döblin alias Vincent Doblin – mit seiner Familie aufgrund seiner jüdischen Herkunft von Berlin über Zürich nach Paris emigriert – setzte als französischer Soldat seinem Leben in Housseras in den Vogesen ein Ende, um der sicheren Gefangennahme durch die deutschen Truppen nach der Zerschlagung seiner Einheit zu entgehen. Wolfgang Döblin war der Sohn des Schriftstellers Alfred Döblin (*1878 - †1957), dem Autor des gesellschaftskritischen Romans „Berlin Alexanderplatz“ aus dem Jahr 1929. Ein Porträt von Wolfgang und Alfred Döblin wird in der literarischen Biografie [35] gezeichnet.

[9] Igor V. Girsanov (*1934 - †1965) war ein russischer Mathematiker, der 1961 seine Promotion in Moskau abgeschlossen hat. Schon 1965 kam Girsanov bei einem Lawinenunglück im Sajangebirge ums Leben. Varianten des Satzes von Girsanov für Semimartingale, wie sie in allgemeinen Finanzmarktmodellen benötigt werden, diskutiert z. B. Protter [36].

Damit ist das Martingalmaß Q durch die Radon-Nikodym-Dichte

$$\frac{dQ}{dP} = \exp(-\frac{\mu-r}{\sigma} W_T - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 T)$$

festgelegt. Mithilfe von Versionen der *Fundamentalsätze der Asset-Pricing-Theorie* für zeitstetige Finanzmarktmodelle kann man aus der Existenz des Martingalmaßes folgern, dass keine Arbitrage im Black-Scholes-Modell existiert und dass der Markt vollständig ist. Gleichzeitig kann der eindeutige Preis jedes Derivats, die Kosten seiner perfekten Replikation, mittels der Formel für die risikoneutrale Bewertung ermittelt werden.

Theorem 3.4 (Risikoneutrale Bewertungsformel) *Der Preis eines Finanzderivats C_T mit Maturität T ist im Black-Scholes-Modell gegeben durch*

$$C_0 = S_0^0 E_Q\left[\frac{C_T}{S_T^0}\right] = e^{-rT} \cdot E_P\left[\exp(-\frac{\mu-r}{\sigma} W_T - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 T) \cdot C_T\right].$$

Der Preis C_0 entspricht den Anfangskosten einer perfekten Replikation des Claims C_T.

In stetiger Zeit ist das Black-Scholes-Modell (mit Ausnahme des Bachelier-Modells, das negative Preise zulässt) das einfachste Modell für Optionen auf Aktienmärkten. Eine Bewertungsformel wie in Theorem 3.4 kann aber auch in komplexeren Modellen mittels Monte-Carlo-Simulation ausgewertet werden. Im Black-Scholes-Modell können Preise für einfache Produkte wie z. B. Vanilla European Calls und Puts explizit mittels Integration bezüglich einer Gauß'schen Dichte bestimmt werden. Ein anderer Zugang kann z. B. bei europäischen, nicht-pfadabhängigen Optionen mittels der Theorie partieller Differentialgleichungen erfolgen. Besonders einfach ergibt sich auch die perfekte Absicherung von Produkten mittels Delta-Hedging: die Stückzahl der Aktien im Replikationsportfolio ist das Delta der Option, die Sensitivität des Optionspreises bezüglich des Aktienpreises.

Das klassische Beispiel für die Optionspreisbewertung, das in den Originalarbeiten von Black, Scholes und Merton betrachtet wurde, ist eine Europäische Call-Option. Wie bereits erläutert, räumt eine Call-Option auf die Aktie mit Maturität T und Strike K dem Käufer das Recht ein, die Aktie zum Zeitpunkt T zum festgelegten Strikepreis K zu erwerben. Dieses Recht wird von einem rationalen Marktteilnehmer nur dann ausgeübt, wenn die Aktie zum Maturitätszeitpunkt mehr wert ist als der Strikepreis. In diesem Fall ist der Gewinn zum Zeitpunkt T gerade die Differenz zwischen aktuellem Marktpreis der Aktie und dem Strike. Sonst verfällt die Option wertlos. Wie alle Derivate im Black-Scholes-Modell ist eine Europäische Call-Option replizierbar. Die berühmte Black-Scholes-Formel für den Preis der Europäischen Call-Option ergibt sich z. B. direkt mittels risikoneutraler Bewertung aus Theorem 3.4.

Korollar 3.5 (Black-Scholes-Formel) *Für eine Europäische Call-Option $C_T = \max\{S_T^1 - K, 0\}$ auf die Aktie mit Maturität T und Strike K ergibt sich der Preis*

$$E_Q\left[e^{-rT}\max\{S_T^1 - K, 0\}\right] = S_0^1 \Phi(d_+(S_0^1, T)) - e^{-rT} K \Phi(d_-(S_0^1, T))$$

mit den Konstanten

$$d_\pm(S_0^1, T) = \frac{\log(S_0^1/K) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Das Black-Scholes-Modell besticht durch seine Einfachheit. Nützlich ist es, um auch in stetiger Zeit Grundprinzipien zu illustrieren. Zur realistischen Beschreibung von Marktdaten ist es jedoch nicht geeignet.

Unter dem statistischen Maß kann man Finanzmarktdaten z. B. mit Methoden aus der Theorie der Zeitreihen analysieren. Dabei zeigt sich, dass Returns weder normalverteilt noch unabhängig sind. Gleichzeitig sind auch Volatilitäten nicht – wie im Black-Scholes-Modell – konstant, sondern stochastisch. Die Unzulänglichkeit des Black-Scholes-Modells lässt sich auch auf Basis einer

Analyse unter dem risikoneutralen Maß erkennen. Vanilla-Optionen wie Europäische Call- und Put-Optionen werden für viele Aktien liquide gehandelt. Die Preise sind transparent am Markt beobachtbar. Um dieselben Preise im Black-Scholes-Modell zu generieren, benötigt man den gegenwärtigen Aktienpreis, den Strike, die Maturität, den Zins und die Aktienvolatilität. Verwendet man von diesen Eingangsgrößen alle bis auf die Volatilität als feste Parameter in der Black-Scholes-Formel, so erhält man eine Preisformel für eine Europäische Call-Option in Abhängigkeit der Volatilität. Unter der *Impliziten Volatilität* einer Option versteht man nun die Volatiliät, unter der das Black-Scholes-Modell denselben Preis liefert wie der Markt. Für verschiedene Strikepreise und Maturitäten kann diese implizite Volatilität bestimmt werden, und man kann die Abhängigkeit der impliziten Volatilität von Strike und Maturität untersuchen. Man beobachtet eine Abhängigkeit von der Maturität (*term structure*) und eine Abhängigkeit vom Strike (*smile* und *skew*). Letztere ist in Abbildung 2 illustriert. Die Abhängigkeit der Impliziten Volatilität von Strike und Maturität ist ein weiterer Nachweis, dass das Black-Scholes-Modell die Realität der Finanzmärkte nicht korrekt beschreibt: in einem Black-Scholes-Modell mit einem vorgegebenen Parametervektor gibt es nur eine Volatilität der Aktie, die dann die Preise aller Call-Optionen für beliebige Strikes und Maturitäten determiniert. Die Implizite Volatilität wäre in einer Black-Scholes-Welt also eine Konstante.

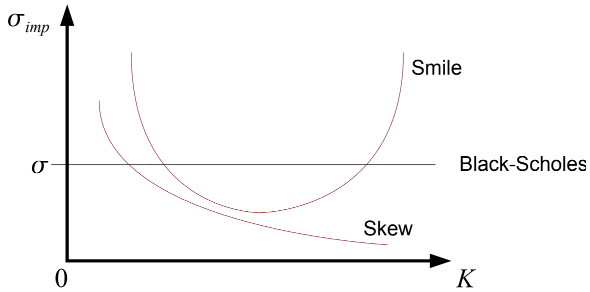

Abbildung 3: Volatily Smile and Skew

Die moderne Finanzmathematik hat für den Aktienbereich, aber auch für andere Assetklassen eine Vielzahl von Modellen entwickelt, von denen einige die Realität deutlich besser abbilden als das Black-Scholes-Modell. Erweiterungen werden natürlich oft mit dem Preis höherer Komplexität bezahlt. Aus übergeordneter Perspektive ist die Analyse von unvollständigen Märkten und der partiellen Absicherung von Optionen ein zentrales Thema. Abstrakt kann man Finanzmathematik in der Welt der Semimartingale strukturell analysieren. Gleichzeitig sind konkrete Modelle, die in der Praxis verwendet werden können, entwickelt worden: lokale und stochastische Volatilitätsmodelle (Heston, Hull-White, SABR,. . .) für Aktienoptionen; Short-Rate-Modelle, Forward-Rate-Modelle und LIBOR-Marktmodelle für den Bereich der Zinsoptionen; strukturelle und intensitätsbasierte Modelle für den Kreditbereich; Multi-Asset-Modelle mit Korrelation bei Abhängigkeit von mehreren Produkten; hybride Modelle für hybride Produkte, etc. (Musiela & Rutkowski [31], Brigo & Mercurio [6], Filipović [13], Bielecki & Rutkowski [4], Overhaus et al. [34]).

Die Verwendung dieser Modelle setzt fundierte Kenntnisse im Bereich der Finanzmathematik voraus. Gleichzeitig gibt es auf komplexen Märkten keine Alternative zu einer adäquaten Modellierung. Auch die weiterentwickelten Modelle dürfen nie als perfekte Abbildungen der Realität verstanden werden. Als Modellrisiko bezeichnet man die Gefahr, falsche Schlussfolgerungen zu ziehen aufgrund falscher Modellwahl. Dieses Risiko muss stets, so gut wie möglich, bei der Analyse mitberücksichtigt werden. Eine robuste Modellierung, die – obwohl falsch in einem absoluten Sinne – für die konkreten Zwecke gut funktioniert, muss das Ziel jeden Anwenders sein. Für Modelle gilt auch im Financial Engineering, wie vom Statistiker George E. P. Box formuliert [5]:

„Essentially, all models are wrong, but some of them are useful."

4 Marktkonsistente Bewertung und MCEV

Finanzmathematik im Sinne von Black & Scholes hat nicht nur Relevanz für Banken und Optionshändler. Neue Produkte auf dem Versicherungsmarkt, aber auch die Bewertung von Aktiva und Passiva erfordern auch bei Versicherungen die Integration finanzmathematischer Methoden. Die Implementierung von internen Modellen unter *Solvency II* und die Berechnung des *Market Consistent Embedded Value* (MCEV) beruhen auf Konzepten, wie sie in den vorangegangenen Abschnitten beschrieben werden.

Wie kann man ein großes Portfolio marktkonsistent bewerten? Ausgangspunkt für die Beantwortung dieser Frage ist ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{F})$, der die im Modellrahmen betrachteten Szenarien beschreibt, die die Preise aller Versicherungs- und Finanzprodukte determinieren. Der Wert des zu betrachtenden Portfolios aus Assets oder auch aus Assets & Liabilities für einen festen Zeithorizont wird durch eine messbare Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ modelliert. Hierbei repräsentiert X das Gesamtportfolio, das alle Risiken – d. h. alle versicherungstechnischen und alle Finanzmarktrisiken – integriert abbildet. Insbesondere werden derivative Strukturen und Embedded Options berücksichtigt. In der Praxis werden Szenarios und korrespondierende Portfoliowerte oft in Monte-Carlo-Simulationen mittels eines *Economic Scenario Generators* erzeugt, u. a. mit dem Ziel der Bewertung eines Portfolios X. Dieser bildet das Rückgrat der marktkonsistenten Bewertung.

Die Lösung des Bewertungsproblems wäre nicht kompliziert, wenn sich die Realität wie eine *Black-Scholes-Welt* beschreiben ließe. In diesem Fall wäre der Gesamtmarkt für alle systematischen Risiken (Equity, Interest Rate, Credit, Insurance Risk) vollständig, ein perfektes Modell bekannt und eine Kalibrierung der Modellparameter an Marktpreise einfach. Für diversifizierbare versicherungstechnische Risiken könnte mit dem Prinzip des Ausgleichs im Kollektiv argumentiert werden. Risikoneutrale Bewertung und eine Detailanalyse des Modells würden sowohl einen eindeutigen MCEV und die korrespondierende perfekte Hedgingstrategie für das Portfolio liefern. Risikomanagement wäre leicht zu implementieren.

Die beschriebene fiktive Situation spiegelt die Realität nur sehr unzureichend wider. Versicherungsunternehmen sind mit einer deutlich komplexeren Wirklichkeit konfrontiert. Realistisch ist ein unvollständiger Markt. Aus Sicht der wirtschaftlichen Akteure besteht erhebliche Modellunsicherheit, und auch bei der Wahl spezifischer Modelle ergeben sich Probleme aufgrund mangelnder Robustheit von Kalibrierungsverfahren. In der Realität existeren daher keine perfekten Absicherungen für Versicherungsportfolios und ein MCEV lässt sich nicht eindeutig ermitteln. Welche Vorgehensweise ist für Versicherungskonzerne, die in einem internen Modell ihre Portfolios und Risiken bewerten wollen, angesichts dieser Herausforderungen zu empfehlen?

Ausgangspunkt eines Lösungsansatzes sind sogenannte Risikomaße, die nicht absicherbare Risiken bewerten und die später in Abschnitt 5 diskutiert werden. Im Gegensatz zu den Kosten der Replikation von Derivaten und Portfolios in vollständigen Märkten besteht bei der Festlegung eines Risikomaßes Wahlfreiheit. Gleichzeitig müssen Verfahrensweisen für den Umgang mit Modellrisiko festgelegt werden. Eine szenariobasierte Stressanalyse könnte z. B. einen Ansatz darstellen. Abschließende Antworten auf diese Fragen kann die Mathematik nie geben, sondern nur alternative Methoden und eingehende Analysen bereitstellen. Eine Entscheidung über den zu implementierenden Ansatz müssen letztlich Aufsichtsbehörden und Ratingagenturen treffen. Im Gegensatz zur risikoneutralen Bewertung geht bei der Bewertung mittels Risikomaßen die Linearität des Bewertungsprinzips und damit die Symmetrie bei der Bewertung von positiven und negativen Portfoliowerten verloren. Risikomessung und MCEV-Berechnung beruhen somit auf einer Vorzeichenkonvention. Portfolios und Risiken werden daher im Folgenden immer aus Sicht des Unternehmens betrachtet, das bewertet werden soll.

Die Frage zur Implementierung der Risikomessung sei zunächst bis zum Abschnitt 5 zurückgestellt. Im Folgenden wird mit $\mathcal{X}$ eine Menge von möglichen Portfolios oder Teilportfolios bezeichnet, deren Risiko mittels eine Risikofunktionals $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ gemessen werden soll. Mathematisch ist $\mathcal{X}$

ein Vektorraum von messbaren reellwertigen Abbildungen auf $(\Omega, \mathcal{F})$, der die Konstanten enthält. Positive Werte von X werden als Vermögen, negative Werte als Schulden interpretiert. Das Funktional ρ wird bei der Implementierung des MCEV zur Messung des Risikos eines Teilportfolios verwendet, das sich nicht perfekt absichern lässt und das daher nicht mittels Marktredundanz eindeutig bewertet werden kann. Um eine gewisse Konsistenz mit dem Prinzip der risikoneutralen Bewertung zu erreichen, wird für robust replizierbare Positionen H gefordert, dass $-\rho(H)$ kleiner als der faire Wert von H ist. Für replizierbare Positionen ist die Bewertung mittels perfekter Absicherung damit attraktiver als die Bewertung auf Grundlage von Anforderungen für das Risikokapital.

Eine **Methode zur Berechnung des MCEV**[10] kann nun folgendermaßen angegeben werden:

(a) Zerlege X in $X = H + Z$ mit

- H replizierbar,
- Z Restportfolio.

(b) Der MCEV wird bestimmt durch

$$\mathrm{Wert(X)} = \mathrm{H_0} - \rho(\mathrm{Z})$$

mit

- H_0 Kosten der perfekten Replikation von H,
- $\rho(Z)$ Kosten des Risikokapitals für Z.

Die Position H beinhaltet dabei nur Risiken, die liquide gehandelt werden.

Aus Sicht des Unternehmens ist ein hoher MCEV Wert(X) erstrebenswert. Äquivalent ist dieses zu der Forderung, die Kosten des Hedges von X möglichst gering zu halten. Ein Hedge ist (im Gegensatz zu einem Replikationsportfolio) eine *offsetting position*, d. h. seine Kosten setzen sich zusammen aus den Hedgingkosten $-H_0$ von H und den Kapitalkosten $\rho(Z)$ von Z.

Ziel bei der Zerlegung von X in (H, Z) ist die Maximierung des MCEV Wert(X) oder, äquivalent, Minimierung der Hedgingkosten. Dieses Optimierungsproblem kann vom Unternehmen in Kooperation mit Aufsichtsbehörden oder Ratingagenturen ohne Nebenbedingung oder unter Nebenbedingungen spezifiziert werden. Sinnvoll können Nebenbedingungen sein, die Mindestanforderungen an den Wert von H oder die Kapitalkosten von Z stellen:

(a) Gefordert werden kann z. B. ein Mindestwert α des replizierbaren Anteils H, d. h. $H_0 \geq \alpha$.

(b) Alternativ ist auch ein Maximalwert $\rho_{\max}$ für die Kapitalkosten des nicht replizierbaren Teilportfolios Z denkbar, d. h. $\rho(Z) \leq \rho_{\max}$.

Aus theoretischer Perspektive sind diese Fragestellungen eng verwandt mit Arbeiten zum robusten *Efficient Hedging* ([16] , [24], [32], [37], [7], [25], [11], [12], [40], [41], [38], [37], [42], [26]), die in Abschnitt 2.3 diskutiert worden sind. In der Praxis ist eine Implementierung der Gesamtportfoliobewertung mittels MCEV eine höchst komplexe Aufgabe. Unterschieden werden müssen dabei replizierbare Risiken und nicht replizierbare messbare Risiken, die in die beschriebene Konstruktion des MCEV einfließen. Eine dritte Kategorie stellen nicht messbare Risiken dar, die einer verlässlichen quantitativen Bewertung unzugänglich sind.

[10] Für eine Diskussion des MCEV (Common core in Swiss Solvency Test, Solvency II, IFRS phase II, CRO-Forum) im Rahmen eines Vortrags an der Leibniz Universität Hannover danken wir Stefan Jaschke [23].

Einfache replizierbare Risiken können direkt und modellfrei mittels Marktdaten bewertet werden (*marking-to-market*). Komplexere Strukturen erlauben jedoch oft nicht eine modellfreie Konstruktion von Replikationsstrategien. Stattdessen existiert für diese im Rahmen bestimmter konkreter Modelle ein perfekter Hedge. Werden diese Modelle an Marktdaten kalibriert, können die Produkte risikoneutral bewertet werden (*Kombination aus marking-to-market und marking-to-model*). Nicht replizierbare, aber messbare (oder zumindest modellierbare) Risiken lassen sich risikoneutral grundsätzlich nicht eindeutig bewerten, können aber z. B. mittels Risikomaßen quantifiziert werden. Die letzte Kategorie der nicht messbaren Risiken erfordert eine gründliche qualitative Analyse, die gemeinsam von Unternehmen, Aufsichtsbehörden und Ratingagenturen erarbeitet werden muss. Einerseits muss versucht werden, nicht messbare Risiken angemessen zu beschränken. Andererseits müssen Strategien erarbeitet werden, wie auf unterschiedliche Szenarien einzugehen ist. Beispiele für messbare und nicht messbare Risiken sind in der folgenden Tabelle aufgeführt.

Replizierbare Risiken	**Nicht replizierbare, messbare Risiken**	**Nicht messbare Risiken**
Aktien, Zinsen, FX Futures	Langfristige Zinsrisiken	Strukturbrüche am Finanzmarkt
Vanilla Equity Options	Langfristige Volatilitätsrisiken	Geschäftsentwicklung
Swaps, Swaptions	Großschäden	Management
Variance Swaps	Nicht diversifizierbare Versicherungsrisiken	Politische Entwicklungen
Vorhersehbare Kündigungen		Langlebigkeit, langfristige Trends

5 Risikomaße

Die marktkonsistente Bewertung von Einzelpositionen oder Portfolios, deren Wert nicht perfekt durch Absicherungsstrategien und durch Ausgleich im Kollektiv festgelegt wird, hängt insbesondere von der Wahl des Risikomaßes ab, das die Kapitalkosten nicht replizierter und nicht diversifizierter Risiken bestimmt. Je nach Risikomaß kann der MCEV desselben Portfolios kleiner oder größer ausfallen. Die Entscheidung für spezifische Risikomaße in internen Modellen beeinflusst zudem die Höhe des erforderlichen Eigenkapitals von Unternehmen, das eine wichtige Kenngröße für die Wahrscheinlichkeit des Auftretens sowie die Schwere ökonomischer Krisen ist. Aufsichtsbehörden und Ratingagenturen sollten deswegen an einer sorgfältigen Analyse und Beurteilung interner Modelle beteiligt werden und die Messgrößen und verwendeten Methoden mitbestimmen.

Das in der Versicherungs- und Finanzindustrie am häufigsten verwendete und vom *Basel Committee on Banking Supervision* empfohlene Risikomaß ist der *Value at Risk* (VaR):

Definition 5.1 *Der* Value at Risk *zum Level* $\lambda \in (0,1)$ *einer Finanzposition* X *ist der kleinste Geldbetrag, den man zu* X *hinzufügen muss, so dass die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes kleiner als* λ *ausfällt:*

$$\mathrm{VaR}_\lambda(X) := \inf\{m \in \mathbb{R} : P[X + m < 0] \leq \lambda\}.$$

Der Parameter $\lambda \in (0,1)$ wird nahe 0 gewählt.[11]

Obwohl in der Praxis aufgrund seiner einfachen Interpretation und guten Implementierbarkeit beliebt, wird Value at Risk als Basis von Risikomanagement- und steuerung im akademischen Bereich bereits seit Mitte der 90er Jahre sehr kritisch gesehen. VaR weist zwei wesentliche Defizite auf. Erstens werden extreme Verluste, die nur mit kleiner Wahrscheinlichkeit auftreten, von VaR völlig ausgeblendet. Unternehmen, die Risiken ausschließlich auf Basis von VaR messen, können folglich keine adäquaten Strategien für den Umgang mit Extremereignissen entwickeln. In Krisenzeiten kann eine mangelhafte Vorsorge die Stabilität der gesamten Volkswirtschaft gefährden. Zweitens ist VaR kein sinnvoller Ausgangspunkt für die Steuerung von Unternehmensportfolios, weil VaR keine angemessenen Anreize für die Diversifikation von Positionen setzt.

[11] Für VaR_λ sind auch alternative Schreibweisen üblich, bei denen der untere Index durch $1-\lambda$ oder/und X durch $-X$ ersetzt wird. So wird etwa der *Value at Risk zum Level* 1 % auch als *Value at Risk zum Level* 99 % bezeichnet.

Die ursprünglich akademische Diskussion hat inzwischen eine breitere Basis gefunden. So werden z. B. in einem Artikel mit dem Titel „Risk Mismanagement“ in der New York Times [33] vom 2. Januar 2009 zwei Praktiker zitiert:

> “David Einhorn, who founded Greenlight Capital, a prominent hedge fund, wrote not long ago that VaR was ‘*relatively useless as a risk-management tool and potentially catastrophic when its use creates a false sense of security among senior managers and watchdogs. This is like an air bag that works all the time, except when you have a car accident.*’ [...] Nicholas Taleb, the best-selling author of ‘The Black Swan’, has crusaded against VaR for more than a decade. He calls it, flatly, ‘*a fraud.*’ ”

Scharf kritisiert wird VaR auch im nach ihrem Chairman, Lord Adair Turner, benannten offiziellen Bericht der britischen Finanzmarktaufsicht *Financial Service Authority* zur Finanzkrise „The Turner Review – A regulatory response to the global banking crisis“ [1].

Im akademischen Bereich werden Risikomaße bereits seit Mitte der 90er Jahre in einer axiomatischen Theorie systematisch untersucht. Diese Theorie wurde durch einen Artikel von Artzner, Delbaen, Eber & Heath [2] initiiert. An die Stelle des *ad hoc*-Risikomaßes VaR treten eine Analyse und Konstruktion von Risikomaßen, die vorgegebene und erwünschte Eigenschaften besitzen. Ein exzellenter Überblick zu statischen Risikomaßen, die das Risiko von Finanzpositionen über einen festen Zeithorizont messen, findet sich in der Monographie von Föllmer & Schied [18].

Mit $\mathcal{X}$ sei eine Menge von Portfolios $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}$ bezeichnet, für die ein Risikomaß $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ zur Quantifizierung definiert wird. Mathematisch ist $\mathcal{X}$ ein Vektorraum von messbaren Abbildungen, der die Konstanten enthält.

Definition 5.2 *Eine Abbildung $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ heißt monetäres Risikomaß, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

1. Monotonie: *Ist $X(\omega) \leq Y(\omega)$ für alle Szenarien $\omega \in \Omega$, so gilt $\rho(X) \geq \rho(Y)$.*
2. Geldinvarianz: *Für jede relle Zahl m gilt $\rho(X + m) = \rho(X) - m$.*

Eigenschaft 1 besagt, dass die Risikokennziffer für eine Position X kleiner ist als die Risikokennziffer einer Position Y, wenn X stets mindestens so viel wert ist wie Y. Gemäß Eigenschaft 2 messen Risikomaße auf einer monetären Skala: wird zur Finanzposition X das Kapital m € hinzugefügt, so verringert sich das Risiko der Finanzposition $X + m$ um diesen Betrag.

VaR ist ein Risikomaß im Sinne der obigen allgemeinen Definition. Weitere Beispiele stellen *Average Value at Risk* – auch bekannt als *Tail Value at Risk*, *Conditional Value at Risk* oder *Expected Shortfall* – und *Utility-Based Shortfall Risk* dar.

Beispiel 5.3 *Im Folgenden bezeichne $\mathcal{X}$ den Raum $L^\infty = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ der beschränkten Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

(a) Average Value at Risk (AVaR):

Der AVaR_λ *einer Finanzposition X zum Level $\lambda \in (0, 1)$ ist definiert durch*

$$\mathrm{AVaR}_\lambda(X) := \tfrac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \mathrm{VaR}_\alpha(X)\, d\alpha.$$

Der AVaR *ordnet jeder Finanzposition X systematisch eine höhere Risikokennziffer als* VaR *zu, d. h.*

$$\mathrm{AVaR}_\lambda(X) \geq \mathrm{VaR}_\lambda(X).$$

Genauer kann AVaR_λ *als das kleinste verteilungsbasierte*[12] *konvexe*[13] *Risikomaß, das* VaR_λ *dominiert, charakterisiert werden.*

[12] Ein Risikomaß ρ heißt *verteilungsbasiert*, falls $\rho(X)$ nur von der Verteilung von X abhängt.
[13] Der Begriff der Konvexität wird in (10) eingeführt.

(b) Utility-based Shortfall Risk (UBSR):

Das UBSR zur Verlustfunktion l und Verlustschranke z ist definiert als

$$\mathrm{UBSR}_z(X) := \inf\{m \in \mathbb{R} : E[l(-(X+m))] \leq z\}.$$

Das UBSR einer Finanzposition X ist der kleinste Geldbetrag, den man zu X hinzufügen muss, so dass der erwartete mittels der Verlustfunktion l reskalierte Verlust eine vorgegebene Schranke z nicht überschreitet.

Alle Risikomaße sind eineindeutig mit einem Akzeptabilitätskriterium verknüpft: jedes Risikomaß ist eindeutig durch die „akzeptablen" Positionen mit nichtpositivem Risiko festgelegt. Das Risikomaß zu einer gegebenen Menge akzeptabler Positionen, der Akzeptanzmenge, ergibt sich als der kleinste Geldbetrag, den man der Position hinzufügen muss, um eine akzeptable Position zu erhalten. Das Akzeptabilitätskriterium von VaR zum Levels λ besagt, dass genau diejenigen Positionen akzeptabel sind, für die die Wahrscheinlichkeit eines Verlusts kleiner als λ ist. Die Höhe der gegebenenfalls auftretenden Verluste und ihre Verteilung wird von VaR nicht berücksichtigt. Die Verlusthöhe ist jedoch aus gesamtwirtschaftlicher Perspektive von entscheidender Bedeutung. Dieses Defizit von VaR wird von AVaR und UBSR nicht geteilt. UBSR z. B. definiert diejenigen Positionen als akzeptabel, deren erwarteter mittels der Verlustfunktion l reskalierte Verlust die vorgegebene Schranke z nicht überschreitet. Die Verlusthöhe in Krisenszenarien wird damit explizit gemessen.

Einen weiteren wichtigen Aspekt des Risikomanagements bilden Anreize zur Portfoliodiversifikation, die Risikomaße liefern sollten. Mathematisch kann dieses mittels der (Semi-)Konvexität von Risikomaßen formalisiert werden. Zur Illustration betrachte man zwei Positionen $X, Y \in \mathcal{X}$. Ist $\alpha \in (0,1)$, dann modelliert die Konvexkombination $\alpha X + (1-\alpha)Y$ eine diversifizierte Position. Diversifikation wird von einem Risikomaß ρ dann als positiv bewertet, wenn die Risikokennziffer der diversifizierten Position höchstens so groß wie das Maximum der Einzelrisiken ist. Mathematisch beschreibt dieses die Semikonvexität von ρ:

$$\rho(\alpha X + (1-\alpha)Y) \leq \max(\rho(X), \rho(Y)), \quad \alpha \in [0,1].$$

Die Semikonvexität ist äquivalent zur Konvexität des Risikomaßes (Föllmer & Schied, 2002):

$$\rho(\alpha X + (1-\alpha)Y) \leq \alpha\rho(X) + (1-\alpha)\rho(Y), \quad \alpha \in [0,1]. \tag{10}$$

Konvexe Risikomaße lassen sich nun mit Methoden der konvexen Analysis über robuste Darstellungssätze charakterisieren, die eine interessante Querverbindung zum Aspekt der Modellunsicherheit aufzeigen (Föllmer & Schied [17], Föllmer, Schied & Weber [19]).

Theorem 5.4 *Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dann sind für ein Risikomaß $\rho : L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathbb{R}$ die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) ρ ist konvex und stetig von oben.

(b) ρ erlaubt eine robuste Darstellung bezüglich der Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathcal{M}_1(P)$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$, die absolut stetig bezüglich P sind:

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{M}_1(P)} \left(E_Q[-X] - \alpha(Q)\right), \quad X \in L^\infty. \tag{11}$$

Hierbei ist $\alpha(Q) = \sup_{\{X \in L^\infty :\, \rho(X) \leq 0\}} E_Q[-X]$ $(Q \in \mathcal{M}_1(P))$ die minimale Penalty-Funktion.

Aussage (b) zeigt, dass das Risikomaß ρ einer Position X den *Worst Case* der erwarteten (und penalisierten) Verluste von X unter der Klasse aller absolut stetigen Wahrscheinlichkeitsmaße zuordnet; dabei werden die erwarteten Verluste durch die Funktion α gemäß der Relevanz der verschiedenen Wahrscheinlichkeitsmaße Q penalisiert.

VaR ist kein konvexes Risikomaß. Beispiele für konvexe Risikomaße, die gleichzeitig sensitiv auf extreme Verluste reagieren, sind der *Average Value at Risk* und *Utility-Based Shortfall Risk*.

Beispiel 5.5

(a) Average Value at Risk (AVaR):

Das konvexe Risikomaß AVaR *erlaubt eine einfache robuste Darstellung:*

$$\mathrm{AVaR}_\lambda(X) = \max_{Q \in \mathcal{Q}_\lambda} E_Q[-X], \quad X \in L^\infty,$$

wobei $\mathcal{Q}_\lambda$ die Menge aller bezüglich P absolutstetiger Wahrscheinlichkeitsmaße Q ist mit Dichten dP/dQ, die P-f.s. durch $1/\lambda$ beschränkt sind. Die Penalty-Funktion in Gleichung (11) hat die Werte $\alpha(Q) = 0$ für $Q \in \mathcal{Q}_\lambda$ und $\alpha(Q) = \infty$ sonst, und das Supremum wird angenommen.

(b) Utility-based Shortfall Risk (UBSR):

Das Risikomaß $\mathrm{UBSR}_z(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} : E[l(-(X+m))] \leq z\}$ *besitzt eine robuste Darstellung (11), wobei das Supremum angenommen wird. Die minimale Penalty-Funktion kann mittels eines eindimensionalen Minimerungsproblems bestimmt werden:*

$$\alpha(Q) = \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{\lambda} \left(z + E_P \left[l^* \left(\lambda \frac{dQ}{dP} \right) \right] \right), \quad Q \in \mathcal{M}_1(P),$$

wobei $l^*(u) = \sup_{x \in \mathbb{R}}(ux - l(x))$ die Fenchel-Legendre-Transformierte von l bezeichnet. Im Fall des entropischen Risikomaßes mit exponentieller Verlustfunktion $l(x) = e^{\alpha x}$ lässt sich die minimale Penalty-Funktion explizit bestimmen und mittels der relativen Entropie bezüglich P ausdrücken.

Das Risikomaß AVaR ist gleichzeitig wichtiger Baustein in der Klasse der verteilungsbasierten Risikomaße. Der folgende Darstellungssatz geht zurück auf Kusuoka [29] und Kunze [28].

Theorem 5.6 *Ein konvexes Risikomaß $\rho : L^\infty \to \mathbb{R}$ ist genau dann verteilungsbasiert und stetig von oben, falls*

$$\rho(X) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_1((0,1])} \left(\int_{(0,1]} \mathrm{AVaR}_\lambda(X)\mu(d\lambda) - \beta(\mu) \right), \quad X \in L^\infty,$$

wobei $\mathcal{M}_1((0,1])$ die Menge der Wahscheinlichkeitsmaße auf $(0,1]$ bezeichnet und

$$\beta(\mu) = \sup_{\{X \in L^\infty :\, \rho(X) \leq 0\}} \int_{(0,1]} \mathrm{AVaR}_\lambda(X)\mu(d\lambda) \quad (\mu \in \mathcal{M}_1((0,1])).$$

Neben der Konvexität ist auch die Sensitivität bezüglich extremer Verluste eine wichtige Eigenschaft von Risikomaßen. Abbildung 4 illustriert die unterschiedliche Sensitivität von VaR, AVaR und UBSR mit polynomialer Verlustfunktion $l(x) = x^p$ mit Exponent p auf extreme Szenarios. Für Details sei auf Giesecke, Schmidt & Weber [20] verwiesen. Mit zunehmenden μ_{peak} werden extreme Verluste größer. Die Abbildung verdeutlicht die mangelhafte Sensitivität von VaR, illustriert aber gleichzeitig, dass sowohl AVaR als auch UBSR extreme Risiken deutlich anzeigen.

Aus theoretischer Perspektive sind AVaR und UBSR dem klassischen Risikomaß VaR deutlich überlegen. Jedoch bringt die Tatsache, dass AVaR und UBSR besonders sensitiv auf extreme Risiken reagieren, auch Probleme mit sich. AVaR und UBSR sind verteilungsbasierte Risikomaße, die von der Verteilung von X unter dem statistischen Maß abhängen. Der Tail dieser Verteilung lässt sich i. A. jedoch nicht robust schätzen.[14] Dieses Problem vererbt sich auf die tailsensitiven Risikomaße. In der Praxis ist eine nur datengetriebene Analyse extremer Risiken nicht möglich. Ökonomische Zusatzannahmen, eine detaillierte Analyse der Portfolios und sinnvolle Fallstudien müssen die Bewertung fundieren. Diese Aspekte müssen – wie auch die Wahl des Risikomaßes – mit den Aufsichtsbehörden abgestimmt werden. Ein transparentes und für alle Marktteilnehmer faires Verfahren ist anzuraten. Der MCEV des Gesamtportfolios ergibt sich dann auf dieser Grundlage.

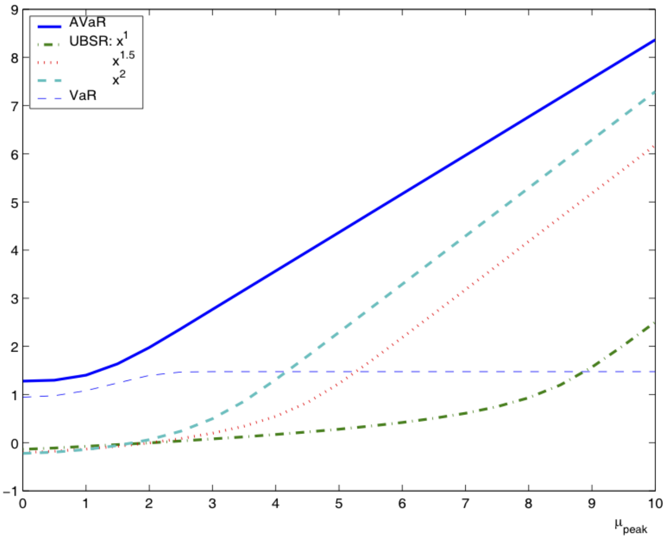

Abbildung 4: $\mathrm{VaR}_{0.05}$, $\mathrm{AVaR}_{0.05}$ und UBSR mit $p \in \left\{1, \frac{3}{2}, 2\right\}$ und $z = 0.3$ als Funktion von μ für die Mischung einer Student-t-Verteilung (Gewicht 0.96) und einer Normalverteilung mit Mittelwert μ_{peak} (Gewicht 0.04).

Literatur

[1] The Turner review - A regulatory response to the global banking crisis, published by the British Financial Services Authority, `www.fsa.gov.uk/pubs/other/turner_review.pdf`, 2009.

[2] Artzner, P., F. Delbaen, J.-M. Eber und D. Heath: *Coherent measures of risk.* Math. Finance, 9(3):203–228, 1999.

[3] Bachelier, L.: *Théorie de la spéculation.* Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics]. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1995. Théorie mathématique du jeu. [Mathematical theory of games], Reprint of the 1900 original.

[4] Bielecki, T. R. und M. Rutkowski: *Credit risk: modelling, valuation, and hedging.* Springer Finance. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[14] Eine interessante Diskussion dieser Problematik und ein konzeptioneller Ansatz für datenbasierte Risikomaße findet sich [21].

[5] Box, G. E. P. und N. R. Draper: *Empirical model-building and response surfaces.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Applied Probability and Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, 1987.

[6] Brigo, D. und F. Mercurio: *Interest rate models—theory and practice.* Springer Finance. Springer-Verlag, Berlin, Second Auflage, 2006. With smile, inflation and credit.

[7] Cvitanić, J. und I. Karatzas: *Generalized Neyman-Pearson lemma via convex duality.* Bernoulli, 7(1):79–97, 2001.

[8] Delbaen, F. und W. Schachermayer: *The mathematics of arbitrage.* Springer Finance. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[9] Donsker, M. D.: *An invariance principle for certain probability limit theorems.* Mem. Amer. Math. Soc., 1951(6):12, 1951.

[10] El Karoui, N. und M.-C. Quenez: *Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market.* SIAM J. Control Optim., 33(1):29–66, 1995.

[11] Favero, G.: *Shortfall risk minimization under model uncertainty in the binomial case: adaptive and robust approaches.* Math. Methods Oper. Res., 53(3):493–503, 2001.

[12] Favero, G. und W. J. Runggaldier: *A robustness result for stochastic control.* Systems Control Lett., 46(2):91–97, 2002.

[13] Filipović, D.: *Term-structure models.* Springer Finance. Springer-Verlag, Berlin, 2009. A graduate course.

[14] Föllmer, H.: *Alles richtig und trotzdem falsch? Anmerkungen zur Finanzkrise und Finanzmathematik.* Mitteilungen der DMV, 17:148–154, 2009.

[15] Föllmer, H. und P. Leukert: *Quantile hedging.* Finance Stoch., 3(3):251–273, 1999.

[16] Föllmer, H. und P. Leukert: *Efficient hedging: cost versus shortfall risk.* Finance Stoch., 4(2):117–146, 2000.

[17] Föllmer, H. und A. Schied: *Convex measures of risk and trading constraints.* Finance Stoch., 6(4):429–447, 2002.

[18] Föllmer, H. und A. Schied: *Stochastic finance-An introduction in discrete time*, Band 27 der Reihe *de Gruyter Studies in Mathematics.* Walter de Gruyter & Co., Berlin, extended Auflage, 2004.

[19] Föllmer, H., A. Schied und S. Weber: *Robust preferences and robust portfolio choice.* In: *Bensoussan, A., Zhang, (eds.) Handbook of Numerical Analysis, Mathematical Modeling and Numerical Methods in Finance*, Seiten 29–89. 2009.

[20] Giesecke, K., T. Schmidt und S. Weber: *Measuring the risk of large losses.* Journal of Investment Management, 6(4):1–15, 2008.

[21] Heyde, C.C., S.G. Kou und X.H. Peng: *What is a good external risk measure: Bridging the gaps between robustness, subadditivity, and insurance risk measures. Preprint, Columbia University*, 2007.

[22] Itô, K.: *Selected papers.* Springer-Verlag, New York, 1987. Edited and with an introduction by S. R. S. Varadhan and D. W. Stroock.

[23] Jaschke, S.: *Valuation and Risk Management of Life Reinsurance.* Talk, LUH-Kolloquium *Versicherungs- und Finanzmathematik*, Hannover, 2010.

[24] Kirch, M.: *Efficient hedging in incomplete markets under model uncertainty. PhD thesis, Humboldt-Universität zu Berlin*, `http://edoc.hu-berlin.de/dissertationen/kirch-michael-2002-01-07/PDF/Kirch.pdf`, 2001.

[25] Kirch, M. und W. J. Runggaldier: *Efficient hedging when asset prices follow a geometric Poisson process with unknown intensities.* SIAM J. Control Optim., 43(4):1174–1195 (electronic), 2004/05.

[26] Klöppel, S. und M. Schweizer: *Dynamic indifference valuation via convex risk measures.* Math. Finance, 17(4):599–627, 2007.

[27] Kramkov, D. O.: *Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets.* Probab. Theory Related Fields, 105(4):459–479, 1996.

[28] Kunze, M.: *Verteilungsinvariante konvexe Risikomaße. Diploma thesis, Humboldt-Universität zu Berlin*, 2003.

[29] Kusuoka, S.: *On law invariant coherent risk measures.* In: *Advances in mathematical economics, Vol. 3*, Band 3 der Reihe *Adv. Math. Econ.*, Seiten 83–95. Springer, Tokyo, 2001.

[30] Møller, T. und M. Steffensen: *Market-valuation methods in life and pension insurance.* International Series on Actuarial Science. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[31] Musiela, M. und M. Rutkowski: *Martingale methods in financial modelling*, Band 36 der Reihe *Stochastic Modelling and Applied Probability.* Springer-Verlag, Berlin, Second Auflage, 2005.

[32] Nakano, Y.: *Efficient hedging with coherent risk measures.* 293(1):345–354, 2004.

[33] Nocera, J.: *Risk Mismanagement.* The New York Times, 2. Januar 2009, `www.nytimes.com/2009/01/04/magazine/04risk-t.html`.

[34] Overhaus, M., A. Bemudez, H. Bühler, A. Ferraris, C. Jordinson und A. Lamnouar: *Credit Hybrid Derivatives.* Wiley Finance. John Wiley & Sons, 2007.

[35] Petit, M.: *Die verlorene Gleichung-Auf den Spuren von Wolfgang und Alfred Döblin.* Eichborn Verlag, 2005.

[36] Protter, P. E.: *Stochastic integration and differential equations*, Band 21 der Reihe *Stochastic Modelling and Applied Probability.* Springer-Verlag, Berlin, 2005. Second edition. Version 2.1, Corrected third printing.

[37] Rudloff, B.: *Convex hedging in incomplete markets.* Appl. Math. Finance, 14(5):437–452, 2007.

[38] Rudloff, B.: *Coherent hedging in incomplete markets.* Quant. Finance, 9(2):197–206, 2009.

[39] Samuelson, P. A.: *Rational theory of warrant pricing.* Industrial Management Review, 6(2):13–39, 1951.

[40] Schied, A.: *On the Neyman-Pearson problem for law-invariant risk measures and robust utility functionals.* Ann. Appl. Probab., 14(3):1398–1423, 2004.

[41] Schied, A.: *Risk measures and robust optimization problems.* Stoch. Models, 22(4):753–831, 2006.

[42] Sekine, J.: *Dynamic minimization of worst conditional expectation of shortfall.* Math. Finance, 14(4):605–618, 2004.